

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

El Teorema de Khovanskii y  
un refinamiento a los sistemas  
trinomiales en el plano

Tesis de Licenciatura

Alumno: Fernando López García

Directores: Dra. Teresa Krick - Dr. Juan Sabia

Agosto de 2002

# Agradecimientos

A mis Directores, Teresa Krick y Juan Sabia, por haber aceptado el trabajo que significa coordinar una Tesis de Licenciatura.

Un profundo agradecimiento a Daniel Perrucci por su entrega y sinceridad al compartir.

A Andrea por estar al lado mío en todo momento.

A mis amigos Pera y Lau por más de una década juntos, y por su destacado aporte a la matemática a través de la "hipérbola tripartita".

A mis tíos por su cariño y a mis primos por la vida compartida.

Un especial agradecimiento a María Ofelia Ronco por su afecto y consideración.

A Carlos D'Andrea por el interés que manifestó en la realización de esta Tesis.

A mis compañeros de la Facultad por el estímulo que me brindaron, Karina, Rafa, Agustín, Patricia, Sandra, Iñaki, Coca, Pablo, Colo, Ezequiel, Leo, Gabriela, Ignacio, Florencia, Ezequiel, Melina, Daniela, Lucía.

A mis hermanos, Joaqui por haberme "enseñado" a jugar al ping pong, Tito por mostrarme como "encender" la computadora y Tata por sus "consejos".

A mis padres por el empuje y el amor que me dan todos los días .

# Índice

<b>Agradecimientos</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1 Teorema de Khovanskii</b>	<b>6</b>
1.1 Resultados preliminares . . . . .	8
1.1.1 Definiciones, notaciones y resultados básicos . . . . .	8
1.1.2 Sobre soluciones de sistemas . . . . .	11
1.1.3 Invariantes en los conjuntos de soluciones luego de un cambio de variable . . . . .	14
1.1.4 Básico de Geometría Diferencial . . . . .	16
1.2 Demostración del Teorema de Khovanskii generalizado . . . . .	25
<b>2 Una cota óptima</b>	<b>43</b>
2.1 Sistemas trinomiales en el plano. . . . .	43
2.1.1 Definiciones, notaciones y resultados básicos . . . . .	43
2.1.2 Resultados previos . . . . .	45
2.1.3 Algunas funciones útiles . . . . .	52
2.1.4 Una nueva cota a los sistemas de tipo $(3, m)$ . . . . .	53
<b>3 Sistemas trinomiales y polítopos de Newton</b>	<b>69</b>
3.1 Geometría de Polítopos . . . . .	69
3.2 Teorema de Rolle para variedades 1-dimensionales en el plano . . . . .	78
3.3 Clasificación de los sistemas trinomiales según su polítopo de Newton	84
<b>Referencias</b>	<b>96</b>

# Introducción

Los sistemas de ecuaciones polinomiales aparecen en muchos modelos matemáticos. En algunos, el interés se focaliza sobre las soluciones complejas, mientras que en otros el interés recae particularmente sobre las soluciones reales. Esto, por cierto, constituye un problema considerablemente más difícil que el anterior.

Una consecuencia inmediata de la Regla de los Signos de Descartes (enunciado por R. Descartes aproximadamente en el año 1650) afirma que una ecuación polinomial en la que aparecen exactamente  $m$  términos monomiales tiene como máximo  $m - 1$  ceros reales positivos. Una cota que claramente no depende del grado de la ecuación.

Con la inquietud de generalizar este último resultado, podríamos preguntarnos si existe una cota, por un lado, para el número de soluciones no degeneradas de sistemas de  $n$  ecuaciones polinomiales en  $n$  variables y, por otro, para soluciones aisladas, cota que dependa únicamente de la cantidad de monomios y variables que involucre el sistema y no del grado de los polinomios como se puede observar en el Teorema de Bezout (ver [2] y [6]). Las soluciones no degeneradas de un sistema de ecuaciones polinomiales

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_n(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

antes mencionadas, son aquellas soluciones en las cuales el determinante de la Matriz Diferencial de  $F := (f_1, \dots, f_n)$  no se anula. Este concepto generaliza la noción de un cero simple de un polinomio en una variable.

Observemos que el interrogante planteado al inicio del párrafo anterior tiene una respuesta negativa en  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , dado que, por ejemplo, el sistema:

$$x_1^m - 1 = x_2^m - 1 = \dots = x_n^m - 1 = 0,$$

involucra  $n + 1$  monomios para cualquier  $m$  y tiene  $m^n$  soluciones no degeneradas, un conjunto claramente no acotado, si  $m$  se mueve libremente.

Con el propósito de encontrar una respuesta a este interrogante, a fines de los años '70, Anatoly Kushnirenko conjeturó que un sistema con  $n$  ecuaciones polinomiales en  $n$  variables, donde la  $i$ -ésima ecuación tiene  $m_i$  monomios, tiene a lo sumo

$$(m_1 - 1)(m_2 - 1) \dots (m_n - 1)$$

soluciones no degeneradas en el ortante positivo ( $\mathbb{R}_{>0}^n$ ). Al momento de enunciar el resultado, Kushnirenko sabía que éste no era cierto si en lugar de no degeneradas, se buscaba acotar soluciones simplemente aisladas.

Un ejemplo de esto puede ser el siguiente sistema de 3 ecuaciones en 3 variables:

$$\begin{cases} x_1(x_3 - 1) = 0 \\ x_2(x_3 - 1) = 0 \\ \prod_{i=1}^5 (x_1 - i)^2 + \prod_{i=1}^5 (x_2 - i)^2 = 0, \end{cases}$$

el cual tiene 25 soluciones aisladas (todas degeneradas), mientras que la conjetura predecía un número máximo de 20 soluciones.

El resultado más importante en este sentido se debe a Khovanskii quien en 1991, como parte de su tesis doctoral, mostró que un sistema polinomial de  $n$  ecuaciones en  $n$  variables, con  $k$  monomios involucrados, tiene a lo sumo

$$(n + 1)^k 2^{k(k-1)/2}$$

soluciones no degeneradas. La demostración del resultado de Khovanskii será desarrollada en detalle en el primer Capítulo de este trabajo.

Utilizando el Teorema de Khovanskii se ha podido también encontrar una cota para la cantidad de soluciones aisladas de sistemas de ecuaciones polinomiales dependiendo del número de variables y monomios involucrados.

A pesar del notorio avance que significa este último hallazgo, la cota que postula el Teorema de Khovanskii es extremadamente grande, más aun si la comparamos con la que propone la Conjetura de Kushnirenko.

De este modo, se presenta el nuevo problema de encontrar una cota óptima para el número de soluciones, por un lado aisladas, y por otro, no degeneradas, de sistemas de ecuaciones polinomiales que no dependa del grado de las ecuaciones o, en su defecto, bajar la cota que postula el Teorema de Khovanskii.

Del Teorema de la función inversa resulta que toda solución no degenerada de un sistema de ecuaciones polinomiales es aislada. Así, toda posible cota óptima a la cantidad de soluciones aisladas, será mayor o igual a la que corresponda a las soluciones no degeneradas. Hasta el momento, no tenemos conocimiento de que se haya podido encontrar un caso donde tales cotas sean diferentes.

La conjetura de Kushnirenko permaneció abierta casi por tres décadas, hasta que, recientemente, Bertrand Haas exhibió el siguiente contraejemplo:

$$\begin{cases} x_1^{108} + 1.1x_2^{54} - 1.1x_2 = 0 \\ x_2^{108} + 1.1x_1^{54} - 1.1x_1 = 0, \end{cases}$$

el cual tiene 5 soluciones no degeneradas en el cuadrante positivo (ver [5]), mientras que la cota de Kushnirenko es 4 en este caso .

Teniendo en cuenta los problemas desarrollados en relación al tema a lo largo de las últimas tres décadas, como así también basándonos, luego de completar su desarrollo y corregir partes, en lo hecho por Li, Rojas y Wang en [8], este trabajo se propone, como una de sus metas, mostrar que la cota óptima para el conjunto de ceros aislados de un sistema de dos ecuaciones trinomiales en dos variables es 5, mientras que la cota que proporciona el Teorema de Khovanskii, antes mencionado, para este caso es 248832. También, se baja la cota de Khovanskii a sistemas de ecuaciones polinomiales en dos variables donde uno de los monomios es un trinomio y el otro un  $m$ -nomio, afirmando un número máximo de  $2^m - 2$  soluciones aisladas. Estos últimos resultados serán analizados en el Capítulo 2.

Por último, en el Capítulo 3 de este trabajo utilizaremos la teoría de polítopos para dar una cota más específica a la cantidad de soluciones no degeneradas de un sistema trinomial en el plano. Los polítopos han sido de gran interés para la matemática desde hace muchos años, manteniendo una curiosa relación con los sistemas de ecuaciones polinomiales, sin embargo, es en estos últimos diez años que se ha podido observar el mayor desarrollo de esta relación.

# Capítulo 1

## Teorema de Khovanskii

En este capítulo haremos una demostración de manera elemental del Teorema de Khovanskii para sistemas polinomiales, que corrige y explica en detalle la demostración hecha en [1].

Sean  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $1 \leq i \leq n$ , aplicaciones diferenciable. Así, dado  $s \in \mathbb{R}^n$ , recordemos que la Matriz Diferencial de  $g := (g_1, \dots, g_n)$  en  $s$  es aquella que tiene en la fila  $i$  y columna  $j$  al coeficiente  $\frac{\partial g_i(s)}{\partial x_j}$ .

Entonces, diremos que una solución  $s_0 \in \mathbb{R}^n$  del sistema  $g_1(x) = \dots = g_n(x) = 0$  es no degenerada, si el rango de la Matriz Diferencial de  $g$  resulta maximal en  $s_0$ .

Dados  $a := (a_1, \dots, a_n)$  y  $x := (x_1, \dots, x_n)$  en  $\mathbb{R}^n$  notaremos  $x^a := x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ .

### Teorema 1 (Khovanskii)

Sea  $(S)$  un sistema de ecuaciones  $P_1(x) = \dots = P_n(x) = 0$  en  $\mathbb{R}[x^a / a \in \mathbb{R}^n]$ , con  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Entonces el número de soluciones no degeneradas de  $(S)$  en  $\mathbb{R}_+^n$  (el ortante positivo de  $\mathbb{R}^n$ ) es menor o igual que  $(n+1)^k 2^{k(k-1)/2}$ , donde  $k$  es el número total de monomios distintos que aparecen en  $P_1, \dots, P_n$ .

La demostración del Teorema de Khovanskii se desprende del siguiente resultado:

**Teorema 2 (Khovanskii generalizado)** Sean  $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_k]$  tal que el grado de  $P_i$  es  $m_i$ . Si  $x := (x_1, \dots, x_n)$ , para  $1 \leq i \leq k$  se define  $y_i(x) := e^{a^{(i)} \cdot x}$ , donde  $a^{(i)} \cdot x = a^{(i)}_1 x_1 + \dots + a^{(i)}_n x_n$ , con  $a^{(i)}_j$  en  $\mathbb{R}$ . El número de soluciones no degeneradas del sistema:

$$\begin{cases} P_1(x, y(x)) = 0 \\ \vdots \\ P_n(x, y(x)) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

en  $\mathbb{R}^n$  es finito y no supera  $(\prod_{i=1}^n m_i)(1 + \sum_{i=1}^n m_i)^k 2^{k(k-1)/2}$ .

Supongamos momentaneamente que el Teorema 2 es cierto y abordemos la demostración del Teorema de Khovanskii.

**Demostración del Teorema 1.** Sean  $x^{a(1)}, x^{a(2)}, \dots, x^{a(k)}$ , con  $a(1), a(2), \dots, a(k)$  en  $\mathbb{R}^n$ , los  $k$  monomios que aparecen en el total de los  $P_i$ , así,

$$P_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^k \alpha_j^{(i)} x^{a(j)}, \quad \text{con } \alpha_j^{(i)} \in \mathbb{R}.$$

Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^n$  definida como  $g(z_1, \dots, z_n) = (e^{z_1}, \dots, e^{z_n})$  donde  $e^{z_i}$  es la función exponencial evaluada en  $z_i$ . Es inmediato observar que  $g$  es biyectiva con inversa,  $g^{-1}(x) = (\ln(x_1), \dots, \ln(x_n))$  para  $x$  en  $\mathbb{R}_{>0}^n$ .

Sean  $P : \mathbb{R}_{>0}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $P(x) := (P_1(x), \dots, P_n(x))$  y  $x(0)$  una solución no degenerada de  $P(x) = 0$ .

Si podemos mostrar que  $z(0) := g^{-1}(x(0))$  es una solución no degenerada de  $P \circ g(z)$ , por la inyectividad de  $g$ , tendríamos acotado superiormente el número de soluciones no degeneradas de  $P_1(x) = \dots = P_n(x) = 0$  por el de las soluciones no degeneradas de  $P_1 \circ g(z) = \dots = P_n \circ g(z) = 0$ , un sistema, como ya veremos, en las condiciones del Teorema 2.

Es inmediato que  $z(0) := g^{-1}(x(0))$  es un cero de  $P \circ g(z)$ , veamos que es no degenerado. Por la Regla de la Cadena, la Matriz Diferencial de  $P \circ g(z)$  en  $z(0)$  se puede expresar de la siguiente manera

$$D P \circ g(z(0)) = D P(x(0)) \cdot D g(z(0)),$$

un producto de dos matrices inversibles. Por lo tanto, la Matriz Diferencial de  $P \circ g(z)$  en  $z(0)$  tiene rango maximal, y  $z(0)$  resulta un cero no degenerado de  $P \circ g(z)$ .

Para  $1 \leq i \leq n$ , definimos  $L_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  el polinomio de grado 1 dado por



$$L_i(y_1, \dots, y_k) := \sum_{j=1}^k \alpha_j^{(i)} y_j.$$

Así,  $P_i \circ g(z)$  se puede escribir de la siguiente manera

$$P_i \circ g(z) = \sum_{j=1}^k \alpha_j^{(i)} g(z)^{a(j)} = \sum_{j=1}^k \alpha_j^{(i)} e^{a(j) \cdot z} = L_i(y_1(z), \dots, y_k(z))$$

donde  $y_j(x) = e^{a(j) \cdot z}$

Con lo cual, los ceros no degenerados de  $P \circ g(z)$  coinciden con las soluciones no degeneradas en  $\mathbb{R}^n$  de

$$L_1(y_1(z), \dots, y_k(z)) = \dots = L_n(y_1(z), \dots, y_k(z)) = 0,$$

un sistema del tipo del enunciado del Teorema 2, donde los polinomios tiene grado 1. Entonces, el número de soluciones no degeneradas de este sistema, y en consecuencia del sistema original, está acotada superiormente por  $(n+1)^k 2^{k(k-1)/2}$ , como se esperaba. □

En lo que sigue del Capítulo vamos a trabajar en la demostración del Teorema 2.

## 1.1 Resultados preliminares

En esta sección expondremos una serie de resultados, con sus respectivas demostraciones, y algunas definiciones clásicas que serán utilizados en la siguiente sección para la demostración del Teorema 2.

Aunque en algunos resultados especificamos el orden de derivabilidad de las funciones, siempre serán aplicados a funciones con derivadas parciales de todos los órdenes continuas.

### 1.1.1 Definiciones, notaciones y resultados básicos

*Dados abiertos  $U \subset \mathbb{R}^m$  y  $V \subset \mathbb{R}^q$ , diremos que una aplicación  $g : U \rightarrow V$  es un  **$C^r$ -difeomorfismo** con  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , si es biyectiva y tanto  $g$  como  $g^{-1}$  tienen derivadas parciales de orden  $r$  continuas.*

Por otro lado, en las mismas condiciones, diremos que  $g : U \rightarrow V$  es un **homeomorfismo**, si es biyectiva y tanto  $g$  como  $g^{-1}$  son continuas.

Dada  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  una aplicación  $C^1$ , se dice que un punto  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  es un **punto crítico** de  $g$  si el rango de la Matriz Diferencial  $Dg := (\partial g_j / \partial x_i)$  de  $g$  especializada en  $x$  no es maximal. Un punto  $y = (y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^q$  se dice **valor crítico** si es la imagen por  $g$  de algún punto crítico. El conjunto de puntos críticos de  $g$  se notará por  $\mathbf{PC}(g)$  y el de valores críticos de  $g$  por  $\mathbf{VC}(g)$ .

Por otro lado, se dice que un punto  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  es un **punto regular** de  $g$  si el rango de la Matriz Diferencial  $Dg$  en  $x$  es maximal. Un punto  $y = (y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^q$  se dice **valor regular** si no es la imagen de ningún punto crítico. El conjunto de puntos regulares de  $g$  se notará por  $\mathbf{PR}(g)$  y el de valores regulares por  $\mathbf{VR}(g)$ .

Observar que un valor regular de  $g$  puede no estar en la imagen de  $g$ .

Sea  $y \in \mathbb{R}^q$  y  $x \in g^{-1}(\{y\})$ . Diremos que  $x$  es una **solución no degenerada** del sistema  $g(x) = y$  si es un punto regular de la función  $g$ .

En el caso en que  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , decir que  $x \in \mathbb{R}$  es un punto crítico (resp. punto regular) es equivalente a que  $g'(x) = 0$  (resp.  $g'(x) \neq 0$ ).

En el caso en que  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , decir que  $x \in \mathbb{R}^m$  es un punto crítico (resp. punto regular) es equivalente a decir que  $Dg(x)$ , la Matriz Diferencial de  $g$  especializada en  $x$ , es singular (resp. no singular).

Los siguientes dos Teoremas clásicos que enunciamos, estrechamente relacionados entre sí, son, entre otras cosas, de fundamental importancia para el estudio de variedades en el Espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^m$ , tema éste que comenzaremos a tratar en las siguientes páginas. Para la demostración de los siguientes resultados ver [12].

**Teorema de la función inversa** Sea  $W$  un abierto en  $\mathbb{R}^m$  y  $g : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación  $C^r$ , con  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Sea  $x_0 \in W$  un punto regular de  $g$ , entonces existe un entorno abierto  $U$  de  $x_0$  en  $W$  tal que  $V = g(U)$  es abierto y  $g : U \rightarrow V$  es un  $C^r$ -difeomorfismo, es decir, una aplicación biyectiva tal que tanto  $g$  como su inversa tienen derivadas parciales de orden  $r$  continuas.

Si  $x \in U$  e  $y = g(x)$ , entonces tenemos la siguiente fórmula para el diferencial de  $g^{-1}$  en  $y$ :

$$Dg^{-1}(y) = (Dg(x))^{-1}.$$

**Teorema de la función implícita** Sea  $W \subseteq \mathbb{R}^m$  un abierto tal que  $0 \in W$  y sea  $g : W \rightarrow \mathbb{R}^q$ , con  $m \geq q$ , una aplicación  $C^r$  tal que  $0$  es un punto regular de  $g$  y  $g(0) = 0$ . Supongamos además que el primero menor de la matriz  $Dg(0)$  es no nulo. Entonces existen entornos abiertos de  $0$  en  $\mathbb{R}^m$ ,  $U = U_1 \times U_2$  (con  $U_1$  abierto de  $\mathbb{R}^q$  y  $U_2$  abierto de  $\mathbb{R}^{m-q}$ ) y  $V \subseteq W$  y  $h : U \rightarrow V$  un  $C^r$ -difeomorfismo, tal que  $h(0) = 0$  y para todo  $x \in U$ ,  $g \circ h(x) = (x_1, \dots, x_q)$  (es decir  $g \circ h$  es una proyección).

El siguiente Teorema proporciona una cota para la cantidad de ceros de un sistema de ecuaciones polinomiales, en el caso en que ésta sea finita.

**Teorema clásico de Bezout** El número de soluciones en  $\mathbb{C}^n$  (contadas sin multiplicidad) de un sistema de  $n$  polinomios en  $n$  variables es o bien infinito o bien finito y menor o igual que el producto de los grados de los polinomios (ver [2] y [6]).

Antes de enunciar un resultado básico de la teoría de los Espacios Métricos, recordemos la siguiente definición:

**Definición** Un conjunto  $E$  en un espacio topológico  $\mathcal{T}$  se dice **nunca denso** si no es denso en ningún abierto de  $\mathcal{T}$ .

**Teorema de Baire** Un espacio métrico completo  $\mathcal{T}$  no es unión numerable de nunca densos (ver [9]).

Del Teorema de Baire se desprende el siguiente resultado en el Espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^q$ :

**Proposición 3** La intersección numerable de abiertos densos en  $\mathbb{R}^q$  es densa.

**Demostración.** Supongamos que existe  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una colección numerable de abiertos densos en  $\mathbb{R}^q$  tal que  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \mathbb{R}^q$  no es denso. Entonces existe  $x \in \mathbb{R}^q$  y  $\rho > 0$  tal que  $B[x, \rho] \cap A = \emptyset$ , resultando que  $B[x, \rho] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c \cap B[x, \rho])$ .

Probemos que  $E_n = (A_n^c \cap B[x, \rho])$  es nunca denso en el espacio métrico completo  $B[x, \rho]$ , lo que, por el Teorema de Baire, resulta absurdo.

Sea  $V$  un abierto no vacío en  $B[x, \rho]$ . Por ser  $A_n$  denso, su complemento tiene interior vacío, al igual que  $E_n$ . Por lo tanto,  $V \not\subseteq E_n$ . Así, existe  $y \in E_n^c \cap V$ . Dado que  $E_n$  es cerrado,  $y \in V$  tiene un entorno abierto en  $B[x, \rho]$  que no contiene ningún punto de  $E_n$ , por lo tanto  $E_n$  es nunca denso. □

### 1.1.2 Sobre soluciones de sistemas

Mediante la siguiente Proposición observamos que los ceros no degenerados de una aplicación  $C^\infty$  resultan aislados, y resaltamos algunas características especiales que verifica el conjunto de ceros de una aplicación  $C^\infty$  propia.

**Proposición 4** *Sea  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación  $C^\infty$  e  $y \in \mathbb{R}^m$ , entonces toda solución no degenerada del sistema  $g(x) = y$  es aislada en el conjunto de soluciones del sistema.*

*Además, si  $g$  es propia, es decir, para todo  $K \subset \mathbb{R}^m$  compacto,  $g^{-1}(K) \subset \mathbb{R}^m$  es compacto, e  $y$  es un valor regular de  $g$ , entonces el sistema  $g(x) = y$  tiene finitas soluciones.*

**Demostración** Sea  $x$  una solución no degenerada del sistema, entonces por definición es un punto regular de la función  $g$ . Por lo tanto, por el Teorema de la función inversa, existe un entorno abierto  $U \subset \mathbb{R}^m$  de  $x$  tal que  $V := g(U)$  es abierto en  $\mathbb{R}^m$  y  $g : U \rightarrow V$  es un difeomorfismo, en particular biyectivo, entonces, en  $U$ , la única solución que tiene el sistema es  $x$ .

Si  $y$  es un valor regular de  $g$ , todas las soluciones del sistema son no degeneradas, con lo cual, toda preimagen  $x(j)$  de  $y$  es un punto aislado. Entonces, existe para cada  $x(j)$  un entorno abierto  $U_{x(j)}$  tal que  $U_{x(j)} \cap g^{-1}(\{y\}) = \{x(j)\}$ . De esta forma,  $\{U_{x(j)}\}_{g(x(j))=y}$  es un cubrimiento por abiertos de  $g^{-1}(\{y\})$  del cual no se puede extraer ningún subcubrimiento propio. Por ser  $g$  propia e  $\{y\}$  un conjunto compacto,  $g^{-1}(\{y\})$  es compacto, entonces podemos extraer de  $\{U_{x(j)}\}_{g(x(j))=y}$  un subcubrimiento finito. Por lo tanto, el cubrimiento es finito y así concluimos que el sistema tiene finitas soluciones. □

En general no sucede que el conjunto de valores críticos de una aplicación  $C^\infty$  sea finito. Pero será muy chico en el sentido que se indica en el resultado, demostrado por A. Sard en 1942 siguiendo el trabajo hecho por A. P. Morse, que a continuación enunciamos. Para su demostración ver [4] y [10].

**Lema de Sard** *Dada  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  una función  $C^\infty$ , el conjunto de valores críticos  $VC(g)$  tiene medida de Lebesgue cero.*

Utilizando el Lema de Sard, exhibiremos alguna de las características que posee el conjunto de valores regulares de una aplicación  $C^\infty$ .

**Proposición 5** *Sea  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  una función  $C^\infty$ . Entonces  $VR(g)$  es una intersección numerable de abiertos que resulta densa en  $\mathbb{R}^q$ .*

*Si además  $g$  es propia, el conjunto  $VR(g)$  es abierto.*

**Demostración.** Dado  $x \in \mathbb{R}^m$  un punto crítico de  $g$ , como el rango de  $Dg(x)$  no es maximal, todos los menores maximales de  $Dg(x)$  son cero. Así,  $PC(g)$  es la intersección del conjunto de ceros de todos los menores maximales de  $Dg$ , que por tener  $g$  derivadas parciales continuas es una intersección de conjuntos cerrados. Por lo tanto,  $PC(g)$  es un conjunto cerrado en  $\mathbb{R}^m$ .

Si bien no podemos afirmar que  $VC(g) := g(PC(g))$  es cerrado, sí sabemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $g(B[0, n] \cap PC(g)) \subset VC(g)$  es compacto, por la continuidad de  $g$  y la compacidad de  $B[0, n] \cap PC(g)$ . Luego  $VC(g)$  se escribe como una unión numerable de cerrados, concluyendo así que  $VR(g) = \bigcap_{n \geq 1} \{g(B[0, n] \cap PC(g))\}^c$  es una intersección numerable de abiertos.

Por el Lema de Sard,  $VC(g)$  tiene medida cero, por lo tanto, no puede contener el entorno de ningún punto en  $\mathbb{R}^q$ , entonces su complemento  $VR(g)$  resulta denso en  $\mathbb{R}^q$ .

Solo nos resta mostrar la última afirmación de la Proposición. Sea  $E$  en  $\mathbb{R}^m$  un conjunto cerrado y  $\beta$  en la clausura de  $g(E) \subset \mathbb{R}^q$ , entonces existe  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  en  $E$  tal que  $g(\alpha_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$ . Por ser  $g$  propia,  $g^{-1}(\{g(\alpha_n)\}_{n \geq 1} \cup \{\beta\})$  es compacto y contiene a  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ . Luego podemos extraer de ésta una subsucesión convergente (podemos suponer que es ella misma) con límite  $\alpha$ . Entonces, por ser  $E$  cerrado, podemos asegurar que  $\alpha \in E$  y, por la continuidad de  $g$ ,  $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha_n) = g(\alpha)$ . Por consiguiente  $\beta \in g(E)$  y  $g$  es cerrada.

Ahora sí, por ser  $g$  cerrada,  $VC(g) := g(PC(g))$  es un conjunto cerrado en  $\mathbb{R}^q$ , entonces  $VR(g) := \{VC(g)\}^c$  es abierto. □

**Definición** Sean  $V$  y  $U$  abiertos en  $\mathbb{R}^m$ , y  $g : V \rightarrow U$  una aplicación suryectiva  $C^\infty$ . Dado  $y \in U$ , un entorno abierto  $U_y \subseteq U$  de  $y$  se dice un **abierto uniformizante** de  $y$  por  $g$  si  $g^{-1}(U_y)$  es una unión disjunta de abiertos  $V_\alpha$  en  $V$ , tal que  $\forall \alpha$  la restricción de  $g$  a  $V_\alpha$  resulta un  $C^\infty$ -difeomorfismo con  $U_y$ .

**Definición** Dada  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  una aplicación  $C^1$  e  $y \in \mathbb{R}^q$ , notaremos con  $N(y)$  a la cantidad (finita o infinita) de soluciones no degeneradas de  $g(x) = y$ .

**Proposición 6** Sea  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación  $C^\infty$  e  $y \in \mathbb{R}^m$ . Entonces:

- i) Si  $x(1), \dots, x(k)$  son  $k$  soluciones no degeneradas de  $g(x) = y$ , entonces existe  $W$ , un entorno abierto de  $y$ , tal que  $N(y') \geq k, \forall y' \in W$ .
- ii) Si además  $g$  es una función propia, entonces  $N : VR(g) \rightarrow \mathbb{N}_0$  satisface que para todo  $y \in VR(g)$  con  $N(y) \geq 1$ , existe  $U_y$ , un abierto uniformizante en  $y$  por  $g$ , en el cual  $N$  es constante.

**Demostración.** i) Por el Teorema de la función inversa,  $\forall 1 \leq i \leq k$ , existe  $V_i$  entorno abierto de  $x(i)$ , tal que  $g|_{V_i} : V_i \rightarrow g(V_i)$  es un  $C^\infty$ -difeomorfismo. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer a los  $V_i$  disjuntos dos a dos con  $g(V_i) = W$ . En particular,  $g$  restringida a  $V_i$  es una biyección con  $W$  y  $Dg$  en  $V_i$  siempre tiene rango maximal. Por lo tanto, para todo  $y' \in W$ , existe  $x(i) \in V_i$  una solución no degenerada de  $g(x) = y'$ , con lo cual  $N(y') \geq k$ .

ii) Sean  $y$  un valor regular de  $g$ ,  $x(1), \dots, x(N(y))$  las finitas soluciones no degeneradas de  $g(x) = y$  y  $V_i$  y  $W$  los abiertos procedentes de la demostración del ítem anterior. Queremos ver que existe en  $W \cap VR(g)$  un abierto uniformizante en  $y$  por  $g$  donde  $N$  es constante.

En la Proposición 5 se mostró que  $VR(g)$  es abierto en estas condiciones, con lo cual, existe  $r > 0$  tal que  $B(y, r) \subseteq W \cap VR(g)$ . Supongamos por el absurdo que  $\forall n \in \mathbb{N}, g^{-1}(B(y, \frac{r}{n})) \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{N(y)} V_i$ , entonces existe una sucesión  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $W \cap VR(g)$

convergente a  $y$ , que satisface en cada uno de sus términos que  $g^{-1}(\alpha_n) \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{N(y)} V_i$ .

Así,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , sea  $\beta_n \notin \bigcup_{i=1}^{N(y)} V_i$ , tal que  $g(\beta_n) = \alpha_n$ .

Tenemos que  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq g^{-1}(\{y\} \cup \{\alpha_i / n \in \mathbb{N}\})$  es conjunto compacto por ser  $g$  propia y  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $y$ , entonces tiene una subsucesión convergente, que suponemos sin pérdida de generalidad que es la misma.

Como  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  está contenida en el cerrado  $\bigcap_{i=1}^{N(y)} V_i^c$ , podemos concluir que existe

$\beta \in \bigcap_{i=1}^{N(y)} V_i^c$  tal que

$$\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = g(\beta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(\beta) \quad \Rightarrow \quad g(\beta) = y,$$

así, para algún  $1 \leq i \leq N(y)$ ,  $\beta = x(i) \in \bigcup_{i=1}^{N(y)} V_i$ , ya que todas las preimágenes de  $y$  están en los  $V_i$ . Absurdo.

Como conclusión existe  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $g^{-1}(B(y, \frac{r}{n})) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N(y)} V_i$ . Por lo tanto, si  $U_y := B(y, \frac{r}{n})$ , el abierto  $U_i := g^{-1}(U_y) \cap V_i$  satisface que  $g|_{U_i} : U_i \rightarrow U_y$  es un  $C^\infty$ -difeomorfismo. Así,  $U_y$  es un abierto uniformizante en  $y$  por  $g$ .

Sólo nos resta mostrar que  $N$  es constante sobre  $U_y$ . Sea  $y' \in U_y$ , entonces, dado que  $g^{-1}(U_y) = \bigcup_{i=1}^{N(y)} U_i$  con  $g|_{U_i}$  una biyección con  $U_y$ , todas las preimágenes de  $y'$  por  $g$  están en  $\bigcup_{i=1}^{N(y)} U_i$ , y para cada  $1 \leq i \leq N(y)$  existe una única solución de  $g(x) = y'$  en  $U_i$ . Es más, dado que  $g|_{U_i}$  es un  $C^\infty$ -difeomorfismo con su imagen,  $Dg$  tiene rango maximal sobre todo  $U_i$ , concluyendo de esta forma que  $g(x) = y'$  tiene  $N(y)$  ceros, todos no degenerados, y así  $N(y') = N(y)$ , para todo  $y' \in U_y$ .  $\square$

### 1.1.3 Invariantes en los conjuntos de soluciones luego de un cambio de variable

En los siguientes resultados se pueden observar algunas características importantes del conjunto de soluciones de un sistema, o simplemente un conjunto, que se mantienen luego de un cambio de variable.

**Proposición 7** Sean  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación  $C^\infty$  y  $h : U \rightarrow V$  un  $C^\infty$ -difeomorfismo, donde  $U$  y  $V$  son abiertos no vacíos de  $\mathbb{R}^m$ .

Entonces, existe una correspondencia biunívoca entre las soluciones del sistema  $g(y) = 0$  y el sistema  $g \circ h(x) = 0$ , la cual respeta soluciones aisladas y no degeneradas.

**Demostración** Sean  $\mathcal{Z} := (g \circ h)^{-1}(0)$  y  $\mathcal{Z}' := g^{-1}(0)$ .

Si  $x \in \mathcal{Z}$ , es inmediato que  $h(x) \in \mathcal{Z}'$ , así,  $h(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{Z}'$ . Y, dado  $y \in \mathcal{Z}'$ ,  $h^{-1}(y) \in \mathcal{Z}$ . Con lo cual,  $h(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}'$ , y tenemos una correspondencia biunívoca entre  $\mathcal{Z}$  y  $\mathcal{Z}'$  determinada por  $h$ .

Sea  $x \in \mathcal{Z}$ , entonces, por la Regla de la Cadena,

$$D(g \circ h)(x) = Dg(h(x)) Dh(x),$$

con  $Dh(x)$  inversible. Así, el rango de  $D(g \circ h)$  es maximal en  $x$ , si y solo si,  $Dg$  lo es en  $h(x)$ . Por lo tanto, la correspondencia determinada por  $h$  respeta soluciones no degeneradas.

Sea  $x \in \mathcal{Z}$  aislado, es decir, existe un abierto  $W \subseteq U$  tal que  $W \cap \mathcal{Z} = \{x\}$ . Si y solo si, por ser  $h$  un homeomorfismo,  $h(W) \subseteq V$  es un entorno abierto de  $h(x)$  con  $h(W) \cap h(\mathcal{Z}) = \{h(x)\}$ , o equivalentemente,  $h(x)$  es aislado en  $\mathcal{Z}'$ .  $\square$

En la siguiente Proposición se puede observar como la cantidad de componentes conexas de un conjunto arbitrario no vacío se mantiene luego de un cambio de variable.

**Proposición 8** Sean  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  un homeomorfismo y  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^m$  un conjunto no vacío. Entonces,  $g(\mathcal{X})$  y  $\mathcal{X}$  tienen el mismo número de componentes conexas compactas y no compactas.

**Demostración.** Veamos que  $g$  manda conexos en conexos y compactos en compactos.

Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^m$  un conjunto conexo y supongamos que existen  $U$  y  $V$  abierto disjuntos tal que  $g(C) \subseteq U \cup V$ . Así,  $C \subseteq g^{-1}(U) \cup g^{-1}(V)$  una unión de abiertos, por ser  $g$  continua. Entonces, por ser  $C$  conexo,  $C \subseteq g^{-1}(U)$  o  $C \subseteq g^{-1}(V)$ , con lo cual,  $g(C) \subseteq U$  o  $g(C) \subseteq V$ . Por lo tanto,  $g(C)$  es conexo.



Dado  $K \subseteq \mathbb{R}^m$  un conjunto compacto, sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento por abiertos de  $g(K)$ . Entonces, por la continuidad de  $g$ ,  $\{g^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$  es un cubrimiento por abiertos de  $K$ , por lo tanto, tiene un subcubrimiento finito, el cual podemos notar lo,  $\{g^{-1}(U_{i_j})\}_{1 \leq j \leq n}$ . Así,  $g^{-1}(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ , resultando un conjunto compacto.

Así, por ser también  $g^{-1}$  un homeomorfismo, tanto  $g$  como  $g^{-1}$  mandan conexos en conexos y compactos en compactos.

Dada  $C \subseteq \mathcal{X}$  una componente conexa,  $g(C) \subseteq g(\mathcal{X})$  es conexa. Así, existe  $C' \subseteq g(\mathcal{X})$  una componente conexa tal que  $g(C) \subseteq C'$ . Con el mismo razonamiento, pero esta vez con  $g^{-1}$ ,  $g^{-1}(C')$  está contenida en una componente conexa y se interseca con  $C$ , por lo tanto,  $g^{-1}(C') = C$  y  $g(C) = C'$ . Ahora, utilizando la biyectividad de  $g$ , tenemos una correspondencia entre las componentes conexas de  $\mathcal{X}$  y  $g(\mathcal{X})$ .

Y, dado que tanto  $g$  como  $g^{-1}$  mandan compactos en compactos, podemos afirmar que  $C$  es una componente conexa compacta de  $\mathcal{X}$  si y solo si  $g(C)$  es una componente conexa compacta de  $g(\mathcal{X})$ .

□

### 1.1.4 Básico de Geometría Diferencial

A continuación daremos una breve introducción a la Geometría Diferencial en el Espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^m$ , exhibiendo algunas definiciones básicas y enunciando resultados elementales que serán utilizados durante el resto del capítulo. Para el desarrollo de esta introducción nos basamos en [4] y [10].

En las siguientes definiciones,  $\mathcal{M}$  indicará un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^m$ .

Diremos que un subconjunto  $U$  de  $\mathcal{M}$  es **abierto en  $\mathcal{M}$**  si puede escribirse como la intersección entre un abierto de  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathcal{M}$ . Con este sentido, se dice que  $\mathcal{M}$  hereda los abiertos de  $\mathbb{R}^m$ . Esto le proporciona a un subconjunto arbitrario de  $\mathbb{R}^m$  una topología.

Sea  $\mathcal{M}'$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^q$ . Una aplicación  $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  se dirá **continua** si para todo abierto  $V$  en  $\mathcal{M}'$ ,  $g^{-1}(V)$  es abierto en  $\mathcal{M}$ . Y diremos que es un **homeomorfismo** si es biyectiva y tanto  $g$  como su inversa son continuas.

Una función  $g : \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  se dirá  **$C^r$** , con  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , si puede ser extendida localmente a una aplicación  $C^r$  en un abierto de  $\mathbb{R}^m$ . Es decir, si  $x \in \mathcal{M}$ , existen un

entorno abierto  $U_x$  de  $x$  en  $\mathbb{R}^m$  y una aplicación  $C^r$   $G_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^q$  que restringida a  $U_x \cap \mathcal{M}$  coincida con  $g$ .

Como puede verse, esta noción de suavidad, al igual que en el Espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^m$ , es una noción local.

Dado  $\mathcal{M}' \subseteq \mathbb{R}^q$ , una aplicación  $C^r$   $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  se llamará un  **$C^r$ -difeomorfismo** si es biyectiva y  $g^{-1}$  es una aplicación  $C^r$ . En este caso uno dirá que  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}'$  son  **$C^r$ -difeomorfos**.

Es inmediato observar que dos conjuntos  $C^r$ -difeomorfos son homeomorfos.

Diremos que un subconjunto  $\mathcal{M}$  de  $\mathbb{R}^m$  es una **variedad  $k$ -dimensional** o equivalentemente una variedad de dimensión  $k$ , si es localmente  $C^\infty$ -difeomorfa a un abierto de  $\mathbb{R}^k$ , queriendo decir con esto que para cada  $x \in \mathcal{M}$  exista un entorno abierto  $U$  de  $\mathcal{M}$  conteniendo a  $x$ , un abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^k$  y un  $C^\infty$ -difeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$ .

Un par  $(U, \varphi)$  con las propiedades mencionadas anteriormente se llamará una **carta de  $\mathcal{M}$  en  $x$** . Notar que el abierto  $V$  en  $\mathbb{R}^k$  que es  $C^\infty$ -difeomorfo a  $U$  aparece implícitamente en la carta como la imagen de  $\varphi$ .

En la *figura 1* se representan dos subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ , la Lemniscata y el gráfico del módulo, que no son variedades.

La Lemniscata presenta un problema topológico en  $a$  que impide que ésta sea una variedad 1-dimensional, es decir, no existe ningún homeomorfismo de un entorno de  $a$  con un abierto de  $\mathbb{R}$ . Y para el gráfico del módulo no existe ninguna aplicación  $C^1$  de un abierto de  $\mathbb{R}$  a un entorno de  $b$ , esto se debe a que la función módulo no es derivable.

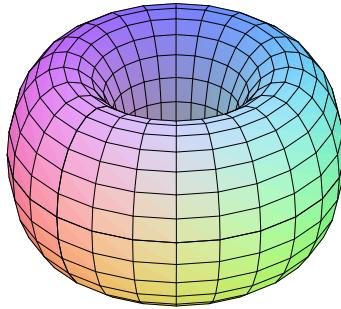


*figura 1.*

En la *figura 2* se exhibe una muy conocida variedad 2-dimensional compacta en  $\mathbb{R}^3$ , que puede ser definida como la preimagen del cero de la aplicación  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$g(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_1\right)^2 + z^2 - r_2^2,$$

donde  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$  con  $r_1 > r_2$ .



*figura 2: Toro*

Vamos a posponer la demostración de que el Toro es una variedad 2-dimensional hasta tener algunos resultados que nos permitan evitar las cuentas.

Estamos en condiciones de probar un resultado, que si bien es elemental en la Geometría Diferencial, juega un papel fundamental en la demostración del Teorema 2.

**Proposición 9** *Sea  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  ( $m > q$ ) una aplicación  $C^\infty$ ,  $b \in g(\mathbb{R}^m)$  un valor regular. Entonces  $\mathcal{M} := g^{-1}(b)$  resulta una variedad de dimensión  $m - q$ .*

**Demostración.** Dado  $p \in \mathcal{M}$ , sea  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  definida por  $f(x) := g(x + p) - b$ ; de este modo,  $f$  resulta  $C^\infty$ ,  $f(0) = 0$  y su Matriz Diferencial en el origen coincide con la de  $g$  en  $p$ . Con lo cual, por ser  $p$  un punto regular de  $g$ , ambas matrices tienen rango  $q$ .

Entonces existe un menor de  $Df$  de orden  $q$  con determinante no nulo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que este sea el primer menor de orden  $q$  (es decir,

$\det \left( \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq q} \right) \neq 0$ ). De no ser así, basta considerar una permutación adecuada en las variables de  $f$ , es decir, definir una nueva aplicación  $\tilde{f}$ , como  $\tilde{f}(x_1, \dots, x_m) := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$  con  $\sigma$  una permutación en  $S_m$ .

Ahora sí, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Función Implícita a  $f$ . Así existen entornos abiertos de 0 en  $\mathbb{R}^m$ ,  $U = U_1 \times U_2$  (con  $U_1$  abierto de  $\mathbb{R}^q$  y  $U_2$  abierto de  $\mathbb{R}^{m-q}$ ) y  $V$ , y  $h : U \rightarrow V$  un  $C^\infty$ -difeomorfismo, tal que  $h(0) = 0$  y para todo  $x$  en  $U$ ,  $f \circ h(x) = (x_1, \dots, x_q)$ .

De esta forma,

$$f(h(x)) = g(h(x) + p) - b = (x_1, \dots, x_q) \quad x \in U,$$

entonces,

$$g(h(x) + p) = b + (x_1, \dots, x_q), \quad x \in U. \quad (1.2)$$

Sea  $V_p := V + p$ , un entorno abierto de  $p$  y sea  $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-q}$  la proyección dada por  $\pi(x) := (x_{q+1}, \dots, x_m)$ . Entonces  $(W, \varphi)$  es una carta de  $\mathcal{M}$  en  $p$ , donde  $W := V_p \cap \mathcal{M}$  y  $\varphi : W \rightarrow U_2 \subseteq \mathbb{R}^{m-q}$  definida por  $\varphi(x) := \pi \circ h^{-1}(x - p)$ .

Es inmediato observar que  $W$  es un abierto en  $\mathcal{M}$  que contiene a  $p$  y que  $\varphi$  es una aplicación  $C^\infty$ , dado que es la restricción de una composición de funciones con esta característica. Con lo cual, solo nos resta verificar que es biyectiva y que su inversa es  $C^\infty$ .

Veamos que  $\psi : U_2 \rightarrow W$  dada por:

$$\psi(x_1, \dots, x_{m-q}) = h(\underbrace{0, \dots, 0}_{q \text{ veces}}, x_1, \dots, x_{m-q}) + p \quad \text{con } (x_1, \dots, x_{m-q}) \in U_2,$$

es la inversa de  $\varphi$ .

Dado que hay varios conjuntos involucrados en la demostración, no nos parece en vano mostrar que  $\psi(U_2) \subseteq W$ , para posteriormente, con toda tranquilidad, calcular  $\psi \circ \varphi$  y  $\varphi \circ \psi$ .

Con este propósito,

$$\psi(U_2) = h(\{0\} \times U_2) + p \subseteq V + p = W'_p \quad \Rightarrow \quad \psi(V) \subseteq V_p,$$

por (1.2)  $g(\psi(U_2)) = g(h(\{0\} \times U_2) + p) = 0 + b = b \quad \Rightarrow \quad \psi(U_2) \subseteq \mathcal{M},$

resultando, como necesitabamos, que  $\psi(U_2) \subseteq W := V_p \cap \mathcal{M}.$

Sea  $x = (x_1, \dots, x_{m-q}) \in U_2,$  entonces

$$\varphi(\psi(x)) = \varphi(h(0, x) + p) = \pi(h^{-1}((h(0, x) + p - p))) = \pi(0, x) = x.$$

Sea  $y \in U$  con  $h(y) + p \in \mathcal{M},$  entonces, por (1.2),  $b + (y_1, \dots, y_q) = g(h(y) + p) = b,$  por lo tanto,  $(y_1, \dots, y_q) = 0$  e  $y \in \{0\} \times U_2.$

Dado  $x \in W := V_p \cap \mathcal{M},$  tenemos que  $y := h^{-1}(x - p) \in U$  y satisface que  $g(h(y) + p) = g(x) = b,$  entonces, por el párrafo anterior,  $y \in \{0\} \times U_2.$  Motivo por el cual  $(0, \pi(h^{-1}(x - p))) = h^{-1}(x - p)$  y se verifica que:

$$\psi(\varphi(x)) = h(0, \pi(h^{-1}(x - p))) + p = h(h^{-1}(x - p)) + p = x.$$

Dado que es inmediato que  $\psi$  es  $C^\infty,$  queda terminada la demostración. □

Esta Proposición sería prácticamente inútil si encontrar un valor regular para una aplicación  $C^\infty g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  fuese extremadamente difícil, es éste uno de los momentos donde se puede apreciar la importancia del Lema de Sard en la Geometría Diferencial, quien asegura que casi todos los puntos en  $\mathbb{R}^q$  son valores regulares de  $g.$

Un ejemplo de una variedad construida como la preimagen de un valor regular por una aplicación  $C^\infty$  es precisamente el Toro (figura 2), que fue definida como la preimagen de 0 (un valor regular de  $g$ ) por la aplicación  $C^\infty g,$  donde  $g(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - r_1)^2 + z^2 - r_2^2.$

Sea  $\mathcal{M}$  una variedad de  $\mathbb{R}^m$  de dimensión  $k.$  Entonces, dado  $p \in \mathcal{M},$  existe una carta  $(U, \varphi)$  de  $\mathcal{M}$  en  $p.$

Así,  $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una aplicación  $C^\infty,$  por lo tanto, tiene sentido pensar en la diferencial de  $\varphi^{-1}$  en  $\varphi(p),$  donde recordemos, ésta es la aplicación lineal  $d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por:

$$d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(x) = x \cdot (D\varphi(p))^t,$$

donde  $D\varphi(p)$  es la Matriz Diferencial de  $\varphi$  en  $p$ .

Se define el **espacio tangente a  $\mathcal{M}$  en  $p$**  como el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^m$  dado por:

$$T_p\mathcal{M} := \text{Im}(d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}) \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Es necesario para tener una buena definición, que el espacio tangente no dependa de la elección de la carta.

Veamos brevemente que dada otra carta  $(U', \psi)$  de  $\mathcal{M}$  en  $p$ , define el mismo espacio vectorial que la carta  $(U, \varphi)$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $U = U'$ , ya que en caso de no ser así restringimos  $\varphi$  y  $\psi$  al abierto  $U \cap U'$ .

La aplicación  $h = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \rightarrow \varphi(U)$  es un  $C^\infty$ -difeomorfismo, entonces su diferencial  $dh_{\psi(p)} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  es un isomorfismo. Si escribimos  $\psi^{-1} = \varphi^{-1} \circ h$  y diferenciamos obtenemos, por Regla de la Cadena, que  $d\psi_{\psi(p)}^{-1} = d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \circ dh_{\psi(p)}$ , con lo cual:

$$d\psi_{\psi(p)}^{-1}(\mathbb{R}^k) = d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \circ dh(\mathbb{R}^k)_{\psi(p)} = d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(\mathbb{R}^k),$$

para de esta forma terminar de mostrar la buena definición.

La dimensión como espacio vectorial de  $T_p\mathcal{M}$  es, como era de esperarse, la dimensión de la variedad  $\mathcal{M}$ :

Sea  $(U, \varphi)$  una carta de  $\mathcal{M}$  en  $p$ , entonces existe una aplicación  $C^\infty$   $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ , donde  $V$  es un entorno abierto de  $p$  en  $\mathbb{R}^m$ ,  $V \cap \mathcal{M} = U$  y  $\phi|_U = \varphi$ .

Así,  $\phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$  es localmente la función identidad, por ser  $\phi$  una extensión de  $\varphi$ . Por lo tanto, por la Regla de la Cadena,  $d\phi_p \circ d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} = id_{\mathbb{R}^k}$ . Entonces, utilizando que son aplicaciones lineales,  $Nu(d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}) = Nu(id_{\mathbb{R}^k}) = \{0\}$ , y como consecuencia, la dimensión de  $\text{Im}(d\varphi_{\varphi(p)}^{-1})$  es  $k$ , como anunciamos al principio.

El espacio tangente a una variedad en un punto  $p$  (trasladado al punto  $p$ ) es la mejor aproximación lineal a la variedad en  $p$ , de la misma forma que, para una función

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable y un punto  $x \in \mathbb{R}$ , la recta de pendiente  $f'(x)$  que pasa  $(x, f(x))$  es la que mejor aproxima lineal al gráfico de  $f$  en  $(x, f(x))$ .

**Definición** Diremos que dos variedades de  $\mathbb{R}^m$  se cortan en **forma transversal** si los espacios tangente a éstas en los puntos de intersección tienen en común únicamente al vector nulo.

La siguiente Proposición exhibe un resultado muy útil a la hora de calcular el espacio tangente a variedades construidas como la preimagen de un valor regular por una aplicación  $C^\infty$ .

**Proposición 10** Dados  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  una aplicación  $C^\infty$ , con  $m > q$ , y  $b$  uno de sus valores regulares, sea  $\mathcal{M}$  la variedad de dimensión  $m - q$  de  $\mathbb{R}^m$  que queda definida como la preimagen de  $b$  por  $g$ .

Entonces, dado  $p$  en  $\mathcal{M}$ , el espacio tangente a  $\mathcal{M}$  en  $p$  coincide con el núcleo de la diferencial de  $g$  en  $p$ .

**Demostración.** Sea  $(U, \varphi)$  una carta de  $\mathcal{M}$  en  $p$ , entonces como  $U \subseteq \mathcal{M}$ , la aplicación  $g \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^q$  es constantemente  $b$ . Por lo tanto, por la Regla de la Cadena,  $dg_p \circ d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \equiv 0$ , de esta forma,

$$dg_p(T_p\mathcal{M}) = dg_p(d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(\mathbb{R}^{m-q})) = \{0\},$$

de esta manera,  $T_p\mathcal{M}$  está contenido en el núcleo de la diferencial.

Dado que  $T_p\mathcal{M}$  y  $Nu(dg_p)$  son subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^m$  y  $T_p\mathcal{M} \subseteq Nu(dg_p)$ , nos alcanza con mostrar que tienen la misma dimensión. Por ser  $b$  un valor regular de  $g$ , el rango de la Matriz Diferencial es maximal, que en este caso coincide con  $q$ , entonces la dimensión del núcleo de  $dg_p$  es  $m - q = \dim(T_p\mathcal{M})$ .

□

El problema de clasificación de variedades conexas ha podido ser resuelto únicamente para variedades de dimensión 1 y 2, aunque el estudio de variedades 3-dimensionales es un tema de investigación actual y ha tenido varios progresos en los últimos años. Para variedades compactas de dimensión mayor que 3 el problema de clasificación es actualmente desconocido. A continuación vamos a enunciar el Teorema de clasificación para variedades 1-dimensionales ( ver [4]).

**Teorema (Clasificación de las variedades conexas 1-dimensionales)**

Toda variedad conexa unidimensional es  $C^\infty$ -difeomorfa a  $S^1$  o a  $\mathbb{R}$ , dependiendo respectivamente si es compacta o no.

El Lema que a continuación se detalla es clave para la demostración del Teorema 2.

**Lema 11** Sea  $\Gamma$  una variedad 1-dimensional cerrada en  $\mathbb{R}^m$  con por lo menos  $q$  componentes conexas no-compactas. Entonces existe un hiperplano en  $\mathbb{R}^m$  que corta a  $\Gamma$  en forma transversal (es decir, no tangencial) en por lo menos  $q$  puntos distintos.

**Demostración.** Dada  $\Gamma_i$  una componente conexa no compacta, veamos que es cerrada en  $\mathbb{R}^m$ . Sea  $x \notin \Gamma_i$ , entonces, puede ocurrir que  $x \notin \Gamma$ , en cuyo caso, por ser un conjunto cerrado, existe un entorno que contiene a  $x$  disjunto de  $\Gamma$ , en particular de  $\Gamma_i$ . O puede que  $x \in \Gamma$ , entonces, el conjunto  $\Gamma_i \cup \{x\}$  no es conexo, con lo cual, existen abiertos disjuntos  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{R}^m$  tal que  $\Gamma_i \cup \{x\} \subseteq A \cup B$  pero  $\Gamma_i \cup \{x\} \not\subseteq A, B$ . Ahora como  $\Gamma_i$  es conexo está enteramente contenido en alguno de ellos, supongamos sea  $A$ , entonces  $x \in B$  un abierto en  $\Gamma_i^c$ . Obtenemos de ambas formas que  $x$  no está en la clausura de  $\Gamma_i$ . Entonces  $\Gamma_i$  es cerrada.

Sabemos que existe  $\theta_i : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma_i$  un difeomorfismo, veamos que ocurre lo siguiente:

$$\text{si la sucesión en } \mathbb{R} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \Rightarrow \quad \|\theta_i(x_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Supongamos, por el absurdo, que existe una sucesión que no satisface la condición anterior, entonces tiene una subsucesión, notemosla  $(x_n)_{n \geq 1}$ , que verifica que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  y  $\theta_i(x_n)$  está acotada. Existe  $\rho \geq 0$  tal que  $\forall n$ ,  $\theta_i(x_n) \subseteq \Gamma_i \cap B[0, \rho]$  un conjunto compacto, entonces tiene una subsucesión, nuevamente la notamos  $(x_n)_{n \geq 0}$ , tal que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  y  $(\theta_i(x_n))_{n \geq 0}$  es convergente en  $\Gamma_i$  a  $\theta_i(x)$ , pero  $\theta_i$  es un difeomorfismo, entonces  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ , absurdo.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\theta_i(n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , para así poder definir la siguiente sucesión  $\left(\frac{\theta_i(n)}{\|\theta_i(n)\|}\right)_{n \geq 1}$  en la esfera  $S^{m-1}$  (si  $\theta_i(n_0) = 0$ , tomo la sucesión a partir de  $n_0 + 1$ ). Por ser la esfera un conjunto compacto  $\exists (n_j)_{j \geq 1}$  una subsucesión de los naturales tal que  $\left(\frac{\theta_i(n_j)}{\|\theta_i(n_j)\|}\right)_{j \geq 1}$  converge a  $x(i)$  en  $S^{m-1}$ . De la misma forma podemos elegir una subsucesión de  $(n_j)_{j \geq 1}$  (supongamos que sea la misma) tal que  $\left(\frac{\theta_i(-n_j)}{\|\theta_i(-n_j)\|}\right)_{j \geq 1}$  converja a  $y(i)$  en  $S^{m-1}$ .

Si repetimos el proceso con las  $q$  componente conexas no-compactas tomando siempre una subsucesión de la anterior, obtenemos una subsucesión de los naturales



$(n_j)_{j \geq 1}$  que satisface que  $\left(\frac{\theta_i(n_j)}{\|\theta_i(n_j)\|}\right)_{j \geq 1}$  y  $\left(\frac{\theta_i(-n_j)}{\|\theta_i(-n_j)\|}\right)_{j \geq 1}$  convergen a  $x(i)$  e  $y(i)$  respectivamente  $\forall i$  entre 1 y  $q$ , es más resulta que  $\|\theta_i(n_j)\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ . De esta manera tenemos  $2q$  puntos en  $S^{m-1}$  límites de las sucesiones anteriores, contados con multiplicidad. Sea  $H_0$  un hiperplano que pase por el origen y no contenga ninguno de los puntos antes mencionados.  $H_0$  divide a  $\mathbb{R}^m$  en dos semiespacios, y alguno de ellos debe contener por lo menos  $q$  de los puntos límites, notémoslo  $S_x$  y supongamos sin pérdida de generalidad que contenga a los  $x(i)$ .

Existen  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ , de forma tal que el hiperplano  $H_0$  es el conjunto de ceros de la aplicación  $h(x) := a_1x_1 + \dots + a_mx_m$ , con  $h(x) > 0$  en  $S_x$ .

Sea ahora  $a_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $h(\theta_i(n_1)) < a_0$ , para todo  $1 \leq i \leq q$ . Se afirma que existe  $j_0$  suficientemente grande tal que  $h(\theta_i(n_j)) > a_0$ ,  $\forall j \geq j_0$ ,  $1 \leq i \leq q$ . Alcanza con probar que existe un tal  $j_0$  para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq q$ . Sabemos que:

$$\frac{\theta_i(n_j)}{\|\theta_i(n_j)\|} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x(i) \quad \Rightarrow \quad h\left(\frac{\theta_i(n_j)}{\|\theta_i(n_j)\|}\right) = \frac{a_1x_1(j) + \dots + a_mx_m(j)}{\|\theta_i(n_j)\|} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} h(x(i)) > 0,$$

donde  $\theta_i(n_j) = (x_1(j), \dots, x_m(j))$ . Sea  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $0 < r < h(x(i))$ , entonces, para  $j \gg 0$ ,

$$\frac{a_1x_1(j) + \dots + a_mx_m(j)}{\|\theta_i(n_j)\|} > r \quad \Rightarrow \quad a_1x_1(j) + \dots + a_mx_m(j) > r\|\theta_i(n_j)\|.$$

Ahora dado que  $\|\theta_i(n_j)\| \rightarrow \infty$ ; para  $j \gg 0$ ,  $\|\theta_i(n_j)\| > \frac{a_0}{r}$ , por lo tanto,

$$a_1x_1(j) + \dots + a_mx_m(j) > r\|\theta_i(n_j)\| > r\frac{a_0}{r} = a_0.$$

Con lo cual, existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que, si  $j \geq j_0$ ,  $h(\theta_i(n_j)) > a_0$  para  $1 \leq i \leq q$ .

Como  $h \circ \theta_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, para  $1 \leq i \leq q$ , existe  $\mu_i$ ,  $n_1 < \mu_i < n_{j_0}$  tal que  $h(\theta_i(\mu_i)) = a_0$ , o equivalentemente, el hiperplano paralelo a  $H_0$  definido por:  $H_{a_0} := h^{-1}(a_0)$ , corta a cada  $\Gamma_i$ .

Notar que esto mismo se verifica para todo hiperplano  $H_a := h^{-1}(a)$  con  $a \geq a_0$ , ya que sólo se está usando de  $a_0$  que sea positivo y que  $h(\theta_i(n_1)) < a_0$ ,  $\forall i$ .

Veamos que existe  $a \geq a_0$ , tal que  $H_a$  corta a  $\Gamma$  en forma transversal.

Para  $1 \leq i \leq q$  y  $a \in \mathbb{R}$ , sea  $\theta_i(s)$  un punto donde  $H_a$  corta en forma tangencial a  $\Gamma_i$ , entonces,  $h(\theta_i(s)) = a$  y el espacio tangente a  $\Gamma_i$  en  $\theta_i(s)$  está contenido en

$H_0$ , o equivalentemente, si  $h(\theta_i(s)) = a$  y  $0 = h(\theta'_i(s)) = (h \circ \theta_i)'(s)$ , utilizando la linealidad de  $h$ . Por lo tanto, para todo  $a \geq a_0$ , que sea valor regular de  $h \circ \theta(t)$ ,  $H_a$  corta en forma transversal  $\Gamma_i$ .

Ahora bien, por el Lema Sard, el conjunto de valores críticos de  $h \circ \theta_i$  tiene medida de Lebesgue cero. Entonces, como la unión finita de conjuntos de medida nula sigue teniendo medida nula, podemos afirmar que el conjunto  $\{a \in \mathbb{R} / a \text{ es valor crítico de } h \circ \theta_i, \text{ para } 1 \leq i \leq q\}$  tiene medida cero. Con lo cual, su complemento resulta denso en  $\mathbb{R}$ , en particular en  $\mathbb{R}_{\geq a_0}$ . Concluimos de esta manera, que existe  $a \geq a_0$  tal que  $H_a$  corta en forma transversal a cada  $\Gamma_i$ .

□

## 1.2 Demostración del Teorema de Khovanskii generalizado

Como mencionamos anteriormente, la demostración del Teorema 2 se hará en forma inductiva en el número  $k$  de exponenciales.

La parte complicada de la demostración es reducir un sistema con  $k+1$  exponenciales a otro que tenga únicamente  $k$  exponenciales. Eso es lo que haremos en la primera parte de esta sección.

A continuación se definen las siguientes aplicaciones que serán utilizadas frecuentemente por el resto del capítulo:

Sean  $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_k, Y_{k+1}]$ . Si  $x := (x_1, \dots, x_n)$ , para  $1 \leq i \leq k+1$  se define  $y_i(x) := e^{a^{(i)} \cdot x}$ , donde  $a^{(i)} \cdot x = a^{(i)}_1 x_1 + \dots + a^{(i)}_n x_n$ , con  $a^{(i)}_j$  en  $\mathbb{R}$ .

Llamaremos  $y(x) := (y_1(x), \dots, y_k(x))$ , y dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , notaremos con  $X$  al punto  $(x, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Entonces, se definen:

- Para  $1 \leq i \leq n$ ,  $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , por:

$$F_i(x) := P_i(x, y(x), y_{k+1}(x)),$$

- $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  por:

$$F(x) = ( F_1(x), \dots, F_n(x) ).$$

Un problema que se nos presenta es el no conocer ni siquiera si el conjunto de soluciones no degeneradas del sistema  $F(x) = 0$  es finito, es por eso que vamos a trabajar con un sistema que nos asegure la finitud de soluciones no degeneradas, y a la vez nos permita conocer las soluciones de  $F(x) = 0$ .

- Dado  $R \in \mathbb{R}_{>0}$ , sea  $F_R : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , dada por:

$$F_R(x, x_0) = ( F_1(x), \dots, F_n(x), F_{n+1}(x, x_0) ),$$

$$\text{donde } F_{n+1}(x, x_0) = x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 - R^2,$$

- $G_R : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , dada por:

$$G_R(x, x_0, t) = ( P_1(x, y(x), ty_{k+1}(x)), \dots, P_n(x, y(x), ty_{k+1}(x)), F_{n+1}(x, x_0) ),$$

- $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dada por:

$$G(x, t) = ( P_1(x, y(x), ty_{k+1}(x)), \dots, P_n(x, y(x), ty_{k+1}(x)) ).$$

**Notación:** Llamaremos  $\mathbf{N}(\mathbf{b}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  (resp.  $\mathbf{N}_{\mathbf{R}}(\mathbf{b}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) al número de soluciones no degeneradas del sistema  $F(x) = b$  con  $b \in \mathbb{R}^n$  (resp.  $F_R(X) = b$  con  $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ ).

El siguiente Lema relaciona la cantidad de soluciones no degeneradas de los sistemas  $F(x) = 0$ , con  $x$  de norma menor a  $R$  en  $\mathbb{R}^n$ , y  $F_R(X) = 0$ , con  $X := (x, x_0)$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Lema 12** *El número de soluciones no degeneradas del sistema  $F(x) = 0$  en  $B(0, R)$  de  $\mathbb{R}^n$  es exactamente la mitad que el de las soluciones no degeneradas del sistema  $F_R(X) = 0$  en todo  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

**Demostración.** Es inmediato observar que  $x$  en la bola abierta  $B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^n$  es una solución del sistema  $F(x) = 0$  si y solo si  $(x, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  es una solución de  $F_R(x, x_0) = 0$ , donde

$$x_0 = \pm \sqrt{R^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \neq 0.$$

Por lo tanto, podemos dar por terminada la demostración del Lema, si mostramos que  $x$  es solución no degenerada si y solo si lo es  $(x, x_0)$ , cada uno de su respectivo sistema. Esto se desprende de la Matriz Diferencial de  $F_R$ :

$$DF_R(x, x_0) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & DF(x) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 2x_1 & \dots & 2x_n & 2x_0 \end{pmatrix},$$

con lo cual, por ser las dos matrices diferenciales cuadradas, tienen rango maximal si y solo si sus determinantes son no nulos. Entonces, dado que  $x_0 \neq 0$  y  $\det(DF_R(x, x_0)) = \det(DF(x)) \cdot 2x_0$ , un determinante es nulo si y solo si lo es el otro.

□

Dado que las aplicaciones definidas en la página anterior tienen derivadas parciales de todos los órdenes continuas, la derivabilidad de las funciones no será un inconveniente para utilizar los resultados preliminares dados en la sección anterior.

**Lema 13** *La aplicación  $F_R : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  es propia y el conjunto de sus valores regulares es un abierto. Si  $b \in VR(F_R) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , entonces, el conjunto de soluciones del sistema  $F_R(X) = b$  es finito.*

**Demostración.** Utilizando las Proposiciones 4 y 5, podemos observar que nos alcanza con mostrar únicamente que  $F_R$  es propia, propiedad que verificaremos a continuación.

Dado que en el Espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^{n+1}$ , cerrado y acotado es equivalente a compacto, veamos que dado  $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un conjunto compacto,  $F_R^{-1}(K)$  es cerrado y acotado.

Por ser  $K$  cerrado y de la continuidad de  $F_R$ , es inmediato que  $F_R^{-1}(K)$  es un conjunto cerrado. Como  $K$  es acotado, existe un real  $\rho > 0$ , tal que  $K \subseteq B[0, \rho]$ . Entonces, dado  $(x, x_0) \in F_R^{-1}(K)$ , la norma de  $F_R(x, x_0)$  es menor o igual a  $\rho$ , y en consecuencia, el módulo de cualquiera de sus coordenadas, en particular la última, está acotado superiormente por  $\rho$ . Con lo cual,

$$|F_{n+1}(x, x_0)| = \sum_{i=0}^n x_i^2 - R^2 \leq \rho^2 \Rightarrow \|(x, x_0)\|^2 \leq \rho^2 + R^2.$$

Así,  $F_R^{-1}(K)$  está acotado.

□

Lo que se intenta hacer a continuación es mirar el problema de acotar la cantidad de soluciones de los sistemas  $F(x) = p$  y  $F_R(X) = p'$ , desde otro punto de vista, en este caso, desde la Geometría Diferencial, para poder con esto atacarlo con otro tipo de herramientas.

Dado  $b$  un valor regular de  $G$ , por la Proposición 9, el conjunto  $\Gamma := G^{-1}(b)$  es una variedad 1-dimensional. Es más, podemos afirmar que es cerrada, por ser la preimagen de un cerrado por una función continua.

Se puede observar fácilmente de la definición de  $G(x, t)$ , que los puntos de la intersección de la variedad  $\Gamma$  con el hiperplano  $\{t = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  son todos aquellos  $(x, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $x$  es una soluciones del sistema  $F(x) = b$ .

Uno podría preguntarse, cuál de todos estos puntos de intersección son los que provienen de una solución no degenerada. Con el propósito de resolver este interrogante, analicemos el espacio tangente a  $\Gamma$  en los punto de intersección con el hiperplano.

Por como fue definida  $\Gamma$  y la Proposición 10, podemos asegurar que el espacio tangente a la variedad en un punto del tipo  $(x, 1) \in \Gamma$  es el núcleo de la diferencial de  $G$  en  $(x, 1)$ . Dado  $(x, 1)$  en  $\Gamma$ :

$$DG(x, 1) = \left( \left( DF(x) \right) \begin{array}{c} \frac{\partial G_1(x, 1)}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial G_n(x, 1)}{\partial t} \end{array} \right).$$

Si además  $x$  es una solución no degenerada de  $F(x) = b$ , la Matriz Diferencial de  $F$  en  $x$  es inversible, resultando que ningún vector no nulo en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con la última componente cero va a ser tangente a  $\Gamma$  en  $(x, 1)$ .

Así, los espacios tangentes a  $\Gamma$  y a la variedad afín  $\{t = 1\}$  en un punto  $(x, 1)$ , con  $x$  una solución no degenerada de  $F(x) = b$ , comparten únicamente al vector nulo, o que es equivalente, se cortan en forma transversal. Puede observarse que esto es una doble implicación, es decir, si  $(x, 1)$  es un punto de intersección transversal entre  $\Gamma$

y  $\{t = 1\}$ , entonces  $x$  es una solución no degeneradas de  $F(x) = b$ .

A continuación se define un campo vectorial  $\xi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , tangencial a la variedad 1-dimensional  $\Gamma$ , de la siguiente manera:

$$\xi(x, t) = (\xi_1(x, t), \dots, \xi_n(x, t), \xi_t(x, t))$$

con

$$\xi_i(x, t) = (-1)^i \det\left(\frac{\partial(G_1, \dots, G_n)}{\partial(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, t)}\right), \quad \text{para } 1 \leq i \leq n,$$

$$\xi_t(X, t) = (-1)^{n+1} \det\left(\frac{\partial(G_1, \dots, G_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right).$$

Como  $b$  es un valor regular de  $G$ , su Matriz Diferencial tiene rango maximal, entonces, el campo  $\xi$  no se anula sobre  $\Gamma$ , ya que existe por lo menos un menor maximal no nulo.

Notemos que  $\xi$  es un campo tangente a  $\Gamma$ . Para esto es suficiente ver que está en el núcleo del diferencial de  $G$ , o, equivalentemente, que es ortogonal a cada una de las filas de la Matriz Diferencial.

Planteando el producto escalar entre  $\xi$  y la  $i$ -ésima fila de la Matriz Diferencial de  $G$ , obtenemos que esto coincide con el determinante de una matriz de  $(n+1) \times (n+1)$  que en las últimas  $n$  filas tiene a la Matriz Diferencial de  $G$  y en la primera, la  $i$ -ésima fila de esta misma matriz, como se puede observar:

$$\left(\frac{\partial G_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial G_i}{\partial x_n}, \frac{\partial G_i}{\partial t}\right) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_t) = - \det \begin{pmatrix} \frac{\partial G_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_i}{\partial x_n} & \frac{\partial G_i}{\partial t} \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} & \frac{\partial G_1}{\partial t} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n} & \frac{\partial G_n}{\partial t} \end{pmatrix} = 0.$$

Dado que en las construcciones anteriores uno únicamente usó que  $G$  era una aplicación  $C^\infty$ , si  $b \in \mathbb{R}^{n+1}$  es en cambio, un valor regular de  $G_R$ , se puede definir, en

forma análoga, una variedad 1-dimensional cerrada  $\Gamma_R := G_R^{-1}(b) \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ , la cual verifica que si  $(X, 1)$  pertenece a  $\Gamma_R \cap \{t = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ , entonces,  $X$  es una solución no degenerada de  $F_R(X) = b$  si y solo si las variedades  $\Gamma_R$  y  $\{t = 1\}$  se cortan en forma transversal en  $(X, 1)$ .

Análogamente, el campo  $\xi_R : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ , definido a continuación, es tangencial a la variedad  $\Gamma_R$ , donde nunca se anula:

$$\xi_R(X, t) = (\xi_{R1}(X, t), \dots, \xi_{Rn}(X, t), \xi_{R0}(X, t), \xi_{Rt}(X, t)),$$

con

$$\xi_{Ri}(X, t) = (-1)^i \det\left(\frac{\partial(G_1, \dots, G_{n+1})}{\partial(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, x_0, t)}\right), \quad \text{para } 1 \leq i \leq n,$$

$$\xi_{R0}(X, t) = (-1)^{n+1} \det\left(\frac{\partial(G_1, \dots, G_{n+1})}{\partial(x_1, \dots, x_n, t)}\right),$$

$$\xi_{Rt}(X, t) = (-1)^{n+2} \det\left(\frac{\partial(G_1, \dots, G_{n+1})}{\partial(x_1, \dots, x_n, x_0)}\right).$$

El Lema que a continuación se enuncia será sumamente importante para relacionar los puntos de intersección transversal entre la variedad  $\Gamma$  y el hiperplano  $\{t = 1\}$ , con las soluciones no degeneradas de un sistema, luego de un cambio de variables apropiado, con únicamente  $k$  exponenciales.

Se puede observar fácilmente, dado que  $F_R$  es un caso particular de  $F$ , que si se reemplaza  $F_R$  por  $F$  en el enunciado del Lema 14, el resultado sigue siendo cierto, con la misma demostración.

**Lema 14** *Sea  $(b, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  un valor regular de  $G \times \xi_t : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , con  $b$  un valor regular de  $F$  y  $G$ , tal que  $F^{-1}(b)$  es finito y  $|c| < |\xi_t(x)|$  para toda  $x \in F^{-1}(b)$ . Entonces  $N(b) \leq N' + q$ , donde  $N'$  es el número de soluciones del sistema*

$$\begin{cases} G(X, t) = b \\ \xi_t(X, t) = c \end{cases} \quad (1.3)$$

*y  $q$  es el número de componentes conexas no-compactas de  $\Gamma := G^{-1}(b)$ .*

**Demostración** Sea  $\Gamma_1$  una componente conexa de  $\Gamma$ , entonces por el Teorema de clasificación de variedades conexas unidimensionales,  $\Gamma_1$  es  $C^\infty$ -difeomorfa a  $S^1$  o a  $\mathbb{R}$ , dependiendo de si es compacta o no.

Si  $\Gamma_1$  no es compacta, existe  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma_1$  un  $C^\infty$ -difeomorfismo. Sean  $s_1, \dots, s_{l_1}$  las preimágenes por  $\theta$  (ordenadas en forma creciente) de los finitos puntos de intersección entre  $\Gamma_1$  y el hiperplano  $\{t = 1\}$ . La finitud proviene de que todos los puntos de intersección son de la forma  $(x, 1)$ , con  $x$  una de las finitas soluciones de  $F(x) = b$ .

Por definición, el espacio tangente a  $\Gamma_1$  en un punto  $\theta(s)$  es la imagen de la diferencial de  $\theta$  en  $s$ , por lo tanto, todo vector tangente a  $\Gamma_1$  en  $\theta(s)$  es un múltiplo de

$$\theta'(s) := (\theta'_1(s), \dots, \theta'_{n+1}(s)).$$

Dado que  $b$  es un valor regular de  $F$ , las variedades  $\Gamma_1$  y  $\{t = 1\}$  se cortan en forma transversal en  $\theta(s_i)$ . Con lo cual, si observamos que  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$  es tangente a  $\{t = 1\}$  si y solo si su última coordenada es nula, podemos concluir que  $\theta'_{n+1}(s_i)$  es distinta de cero. Entonces, la aplicación que resulta de restarle 1 a la última coordenada de  $\theta$ , notémosla  $\theta_{n+1} - 1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tiene como únicos ceros a los  $s_i$ , los cuales resultan no degenerados (simples), por ser  $\theta'_{n+1}(s_i) \neq 0$ . Podemos de este modo asegurar que

$$\theta'_{n+1}(s_i) \cdot \theta'_{n+1}(s_{i+1}) < 0, \quad \text{para } 1 \leq i \leq l_1 - 1.$$

Relacionemos lo que acabamos de obtener con el campo vectorial  $\xi$ . Dado que  $\xi$  es no nulo sobre  $\Gamma_1$  para la cual es tangente en  $\theta(s)$ , los vectores  $\theta'(s)$  y  $\xi(\theta(s))$  son cada uno de ellos un múltiplo no nulo del otro. Con lo cual, podemos observar

$$(\xi_1(\theta(s)), \dots, \xi_n(\theta(s)), \xi_t(\theta(s))) = \eta(s) (\theta'_1(s), \dots, \theta'_n(s), \theta'_{n+1}(s)).$$

donde  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es el cociente de los siguientes productos escalares:

$$\eta(s) := \frac{\theta'(s) \cdot \xi(\theta(s))}{\theta'(s) \cdot \theta'(s)}.$$

Es inmediato que  $\eta$  es continua y nunca se anula sobre  $\mathbb{R}$ , con lo cual, es siempre positiva o siempre negativa.

Por lo tanto, por ser  $\theta'_{n+1}(s_i) \theta'_{n+1}(s_{i+1}) < 0$ , resulta que  $\xi_t(\theta(s_i)) \xi_t(\theta(s_{i+1})) < 0$ , para  $1 \leq i \leq l_1 - 1$ . Así, por ser  $|c| < \min\{|\xi_t(\theta(s_i))|, |\xi_t(\theta(s_{i+1}))|\}$ , podemos concluir que

$$\xi_t(\theta(s_i)) < c < \xi_t(\theta(s_{i+1})) \quad \text{o} \quad \xi_t(\theta(s_{i+1})) < c < \xi_t(\theta(s_i)).$$



Entonces, por la continuidad de  $\xi_t \circ \theta$ , existe  $d_i \in (s_i, s_{i+1})$  tal que  $\xi_t(\theta(d_i)) = c$ . Con lo cual,  $\theta(d_i)$  es una solución del sistema (1.3) que, por ser  $(b, c)$  un valor regular de  $G \times \xi_t$ , resulta no degenerada.

Por lo tanto, la cantidad de puntos de intersección de  $\Gamma_1$  con  $\{t = 1\}$ , no supera el número de soluciones no degeneradas en  $\Gamma_1$  del sistema (1.3) más uno.

El análisis que se hace para el caso compacto es esencialmente el mismo que para el caso no compacto.

Si  $\Gamma_1$  es compacta, existe  $\phi : S^1 \rightarrow \Gamma_1$  un  $C^\infty$ -difeomorfismo. Redefinamos la parametrización  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma_1$  como:

$$\theta(s) := \phi(\cos(2\pi s), \sen(2\pi s)).$$

Notemos que por ser  $\phi$  es un  $C^\infty$ -difeomorfismo y  $s \mapsto (\cos(2\pi s), \sen(2\pi s))$  una aplicación con diferencial no nulo,  $\theta'(s) \neq 0$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

Sean  $s_1, \dots, s_{l_2}$  las preimágenes por  $\theta$  en  $[0, 1)$  (ordenadas en forma creciente) de los finitos puntos de intersección entre  $\Gamma_1$  y  $\{t = 1\}$ .

Así, por la periodicidad de  $s \mapsto (\cos(2\pi s), \sen(2\pi s))$ , la aplicación  $\theta_{n+1} - 1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tiene como únicos ceros a  $\{s_i + n \mid 1 \leq i \leq l_2 \text{ y } n \in \mathbb{Z}\}$ , los cuales resultan simples.

Entonces, en particular

$$\theta'_{n+1}(s_i)\theta'_{n+1}(s_{i+1}) < 0, \text{ para } 1 \leq i \leq l_2 - 1 \quad \text{y} \quad \theta'_{n+1}(s_{l_2})\theta'_{n+1}(s_1 + 1) < 0.$$

Con lo cual, de la misma forma que para el caso no compacto,

$$\xi_t(\theta(s_i))\xi_t(\theta(s_{i+1})) < 0, \text{ para } 1 \leq i \leq l_2 - 1 \quad \text{y} \quad \xi_t(\theta(s_{l_2}))\xi_t(\theta(s_1 + 1)) < 0.$$

Así, por ser  $|c| < |\xi_t(\theta(s_i + n))|$  para  $1 \leq i \leq l_2$  y  $n \in \mathbb{Z}$ , y la continuidad de  $\xi_t \circ \theta$ , existen  $d_i \in (s_i, s_{i+1})$  y  $d_{l_2} \in (s_{l_2}, s_1 + 1)$ , tal que  $\xi_t(\theta(d_j)) = c$  para  $1 \leq j \leq l_2$ .

Por lo tanto,  $\theta(d_j)$  es una solución no degenerada del sistema (1.3), distinta de  $\theta(d_{j'})$ , si  $1 \leq j \neq j' \leq l_2$ , por la inyectividad de  $s \mapsto (\cos(2\pi s), \sen(2\pi s))$  sobre  $(s_1, s_1 + 1)$ .

Entonces, la cantidad de puntos de intersección entre  $\Gamma_1$  y  $\{t = 1\}$  no supera el número de soluciones no degeneradas del sistema (1.3) en  $\Gamma_1$ .

Podemos de este modo concluir que la cantidad de puntos de intersección entre  $\Gamma$  y el hiperplano  $\{t = 1\}$  es menor o igual que el número de soluciones (que resultan

no degeneradas) del sistema (1.3) más la cantidad de componentes conexas no compactas. Así, utilizando la correspondencia entre los puntos de intersección de  $\Gamma$  con  $\{t = 1\}$  y las soluciones de  $F(x) = b$ , damos por terminada la demostración

□

Antes de comenzar con la demostración del Teorema 2, vamos a dar una serie de Lemas que nos permitirán, junto con otros resultados, garantizar la existencia del valor regular  $(b, c)$  del enunciado del Lema 14.

**Lema 15** *Dado el conjunto  $\mathcal{A}_R := \{b \in \mathbb{R}^{n+1} / b \in VR(F_R) \text{ y } N_R(b) > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , la aplicación  $\psi_R : \mathcal{A}_R \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:*

$$\psi_R(b) = \min_{F(X)=b} |\xi_t(X, 1)|,$$

*resulta continua y estrictamente positiva (recordar que  $X = (x_1, \dots, x_n, x_0)$ ).*

*Además, el conjunto  $W_{\psi_R} := \{(b, c) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} / b \in \mathcal{A}_R \text{ y } |c| < \psi_R(b)\}$  es abierto.*

**Demostración.** Sea  $b \in \mathcal{A}_R \subset VR(F_R)$ , así, toda solución  $X$  de  $F_R(X) = b$  es no degenerada, con lo cual,

$$\xi_{Rt}(X, 1) = (-1)^{n+2} \det \left( \frac{\partial(G_1, \dots, G_{n+1})}{\partial(x_1, \dots, x_n, x_0)}(X, 1) \right) = (-1)^{n+2} \det \left( \frac{\partial(F_1, \dots, F_{n+1})}{\partial(x_1, \dots, x_n, x_0)}(X) \right) \neq 0,$$

Entonces, dado que el conjunto de soluciones de  $F_R(X) = b$  es finito, por ser  $b$  un valor regular, podemos asegurar que  $\psi_R(b) > 0$ .

Si recordamos que  $F_R$  es propia, por la Proposición 6 *ii*), podemos asegurar que existe  $U_b$  un abierto uniformizante de  $b$  en el cual  $N_R$  es constante, entonces, si  $F_R^{-1}(U_b)$  es la unión disjunta de los  $U_i$ , con  $1 \leq i \leq N_R(b)$ , por la continuidad de  $\xi_t(X, 1)$  en los  $U_i$  tenemos que  $\psi_R$  es continua sobre  $U_b$ , para todo  $b \in \mathcal{A}_R$ .

Veamos primero que  $\mathcal{A}_R$  es abierto. Por el Lema 13, el conjunto de valores regulares de  $F_R$  es abierto, entonces nos alcanza con ver que  $\{b \in \mathbb{R}^{n+1} / \text{el sistema } F_R(X; y(X)) = b, \text{ tiene alguna solución}\}$  es abierto, lo cual es inmediato si utilizamos la Proposición 6 *i*).

Las funciones  $g_1, g_2 : \mathcal{A}_R \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por:

$$g_1(b, c) := \psi_R(b) - c \quad g_2(b, c) := \psi_R(b) + c$$

son evidentemente continuas. Entonces, las preimágenes por  $g_1$  y  $g_2$  del intervalo  $(0, \infty)$ , son abiertos. Así, el conjunto

$$g_1^{-1}(0, \infty) \cap g_2^{-1}(0, \infty) = W_{\psi_R}$$

es abierto en  $\mathcal{A}_R \times \mathbb{R}$ , a su vez un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Resultando, de este modo, que  $W_{\psi_R}$  es abierto en  $\mathbb{R}^{n+2}$ . □

En el Lema 13, cuando se mostró que  $VR(F_R)$  es un conjunto abierto, se utilizó fuertemente que  $F_R$  es propia, propiedad que no tenemos garantizada con  $F$ . Por lo tanto, en algún sentido, el conjunto  $\mathcal{A}$  definido en el siguiente Lema reemplaza al de los valores regulares.

**Lema 16** *Si existe  $C \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $b \in \mathbb{R}^n$   $N(b) \leq C$ , entonces el conjunto  $\mathcal{A} := \{b \in \mathbb{R}^n / \exists B_b \text{ entorno abierto de } b \text{ donde } N \text{ es constante}\}$  es abierto y denso en  $\mathbb{R}^n$ .*

**Demostración.** Está claro por su construcción que es un conjunto abierto. Supongamos por el absurdo que no es denso, entonces existe un abierto  $A \neq \emptyset$  que no contiene ningún elemento de  $B$ , ahora para todo  $b' \in A$ ,  $0 \leq N(b') \leq C$  en  $\mathbb{N}$ , entonces existe  $b$  en  $A$  donde  $N$  alcanza el máximo.

Por el Lema 6 i) existe  $V_b$  un entorno abierto de  $b$  tal que  $N(b') \geq N(b)$ ,  $\forall b' \in V$ , entonces, para todo  $b'$  en  $U_b = A \cap V_b$  tenemos que  $N(b) \leq N(b') \leq N(b) \Rightarrow N$  es constante sobre  $U_b$ , con lo cual  $b \in A \cap B = \emptyset$ , Absurdo. □

**Lema 17** *Si existe  $C \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $N(b) \leq C$ , entonces la aplicación  $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definida por:*

$$\psi(b) = \begin{cases} 0 & \text{si } N(b) = 0, \\ \min_{\substack{F(X)=b \\ X \in PR(F)}} |\xi_t(X, 1)| & \text{si } N(b) > 0, \end{cases}$$

*es no negativa y continua.*

*Además, el conjunto  $W_\psi := \{(b, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / b \in \mathcal{A} \text{ y } |c| < \psi(b)\}$  resulta abierto.*

**Demostración.** Sea  $b \in \mathcal{A}$ . Si  $N(b) = 0$ , existe  $B_b \subseteq \mathcal{A}$  un entorno abierto de  $b$  donde  $N$  es constantemente cero. Así,  $\psi|_{B_b} \equiv 0$ , resultando continua en  $b$ .

Si  $N(b) > 0$ , por la Proposición 6 *i*), existe  $U_b$  un entorno abierto de  $b$  donde  $N \geq N(b)$ , y  $V_1, \dots, V_{N(b)}$  abiertos disjuntos dos a dos tal que  $F|_{V_i} : V_i \rightarrow U_b$  es un  $C^\infty$ -difeomorfismo. Sin pérdida de generalidad, dado que  $b \in \mathcal{A}$ , podemos suponer que  $N$  resulta constante sobre  $U_b$ .

Por lo tanto, si  $b' \in U_b$ , toda solución no degenerada de  $F(X) = b'$  está en algún  $V_i$ . Así, dado que  $\xi_t$  es continua sobre cada uno de los finitos  $V_i$ , tenemos garantizada la continuidad de  $\psi$  en  $U_b$ , y en consecuencia, en  $b$ .

De la misma forma que en el Lema 15, veamos que  $W_\psi$  es abierto en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Las funciones  $g_1, g_2 : \mathcal{A} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por:

$$g_1(b, c) := \psi(b) - c \quad g_2(b, c) := \psi(b) + c$$

son continuas. Así, el conjunto

$$g_1^{-1}(0, \infty) \cap g_2^{-1}(0, \infty) = \{(b, c) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R} / -\psi(b) < c < \psi(b)\} = W_\psi$$

es abierto en  $\mathcal{A} \times \mathbb{R}$ , que, por el Lema 16 podemos asegurar que es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^{n+2}$ , resultando, de este modo, que  $W_\psi$  es abierto en  $\mathbb{R}^{n+2}$ . □

Ya después de haber trabajado por separado en los puntos claves de esta demostración nos dispondremos esencialmente a relacionar en forma apropiada los resultados. Como habíamos mencionado la demostración se hará por inducción en el número  $k$  de exponenciales.

**Demostración del Teorema 2.** Analicemos primero el caso donde el número de exponenciales es cero.

Así,  $F_1(x) = \dots = F_2(x) = 0$  es un sistema polinomial de  $n$  ecuaciones y  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ , donde el grado de cada  $F_i$  es  $m_i$ . Con lo cual, del Teorema Clásico de Bezout se desprende que el conjunto de soluciones no degeneradas en  $\mathbb{C}^n$  de dicho sistema es finito y acotado por  $\prod_{i=1}^n m_i$ . Ahora, dado que una solución no degenerada en  $\mathbb{R}^n$ , es también no degenerada en  $\mathbb{C}^n$ , el Teorema 2 queda demostrado para los sistemas donde el número de exponenciales es cero.

Asumiremos inductivamente que en los sistemas con  $k$  (o menos) exponenciales se verifica la cota propuesta por el Teorema 2 para el número de soluciones no degeneradas.

Sea  $F_1(x, y(x), y_{k+1}(x)) = \dots = F_n(x, y(x), y_{k+1}(x)) = 0$  un sistema, como el de la página 25, con  $k + 1$  exponenciales.

Ante la inmediata imposibilidad de poder asegurar que el número de soluciones no degeneradas de  $F(x) = 0$  es finito, vamos primero a demostrar el Teorema para un sistema particular de la forma  $F_R(X) = p$  (ver página 26). Decimos que el sistema es particular, ya que, si recordamos, la inducción se hace en el número de exponenciales y no en el número de variables o ecuaciones, el cual se mueve con suma libertad.

Sean  $x(1), \dots, x(m)$ , con  $1 \leq m < \infty$ , soluciones no degeneradas del sistema  $F_R(X) = p$  (no necesariamente deben ser todas), entonces, por la Proposición 6 *i*), existe un entorno abierto  $W$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tal que  $N_R(b) \geq m$ , para todo  $b$  en  $W$ , con  $N_R(b)$ , recordemos, el número de soluciones no degeneradas del sistema  $F_R(X) = b$ .

Así, si existe  $C \in \mathbb{N}$  tal que  $N_R(b) < C$ , con  $b$  en  $W$ , entonces,  $m < C$ .

Mostremos que existe  $b \in W \cap VR(F_R) \cap VR(G_R)$  y  $c \in \mathbb{R}$ , tal que  $(b, c)$  es un valor regular de  $G_R \times \xi_{Rt}$  y  $|c| < \psi_R(b)$ .

Dado que  $G_R$ ,  $F_R$  y  $\xi_{Rt}$  son aplicaciones  $\mathbb{C}^\infty$ , por la proposición 5, los conjuntos de valores regulares de cada una de ellas es una intersección numerable de abiertos densos. Así,  $V_R := (VR(F_R) \times \mathbb{R}) \cap (VR(G_R) \times \mathbb{R}) \cap VR(G_R \times \xi_{Rt})$  es una intersección numerable de abiertos densos en  $\mathbb{R}^{n+2}$ , por lo tanto, mediante la Proposición 3, resulta denso en  $\mathbb{R}^{n+2}$ .

Dado que  $V_R$  es denso en  $\mathbb{R}^{n+2}$ , nos alcanza con mostrar que, si  $W_{\psi_R}$  es el conjunto abierto definido en el Lema 15, el abierto  $(W \times \mathbb{R}) \cap W_{\psi_R}$  es no vacío, ya que de ser así, cualquier  $(b, c) \in V_R \cap (W \times \mathbb{R}) \cap W_{\psi_R} \neq \emptyset$  es un punto con las características que estábamos buscando.

Por ser  $VR(F_R)$  denso en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $W \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  abierto, existe  $b \in W$  un valor regular de  $F_R$  para el cual  $N_R(b) \geq 1$ , entonces,  $b \in \mathcal{A}_R$ , donde  $\mathcal{A}_R$  es el conjunto abierto definido en el Lema 15. Así,  $(b, 0)$  pertenece a  $W_{R\psi}$ , por ser  $\psi_R$  estrictamente positiva, y como consecuencia,  $(b, 0) \in (W \times \mathbb{R}) \cap W_{\psi_R}$  que resulta un conjunto no vacío.

Sea  $(b, c) \in V_R \cap (W \times \mathbb{R}) \cap W_{\psi_R}$ , entonces,  $(b, c)$  es un valor regular de  $G_R \times \xi_{Rt}$  con  $b$  un valor regular de  $F_R$  y  $G_R$ . Es más, por la Proposición 4,  $F_R^{-1}(b)$  es finito, y, dado que  $\psi_R(b) := \min |\xi_{Rt}(X, 1)|$  donde  $X$  es una solución de  $F_R(X) = b$ , se desprende que  $|c| < |\xi_{Rt}(X, 1)|$  para todo  $X$  con  $F(X) = b$ .

Por lo tanto, por el Lema 14, el número de soluciones no degeneradas  $N_R(b)$  es menor o igual que  $N' + q$ , donde  $N'$  es el número de soluciones no degeneradas del sistema

$$\begin{cases} G_R(X, t) = b \\ \xi_{Rt}(X, t) = c, \end{cases} \quad (1.4)$$

y  $q$  es el número de componentes conexas no compactas de la variedad 1-dimensional  $\Gamma_R := G_R^{-1}(b)$ .

En este momento, pareciera que tenemos un problema aun mayor, ya que, ahora no solo tenemos que acotar el número de soluciones de un sistema, sino que también tenemos que acotar la cantidad de componentes conexas no compactas de una variedad. La ventaja que esta modificación nos presenta es que vía un cambio de variables apropiado, el número de soluciones del sistema (1.4) y la cantidad de componentes conexas no compactas de  $\Gamma$ , quedan acotados respectivamente cada uno de ellos por un sistema con sólo  $k$  exponenciales.

Sea  $h : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  el  $C^\infty$ -difeomorfismo definido por:

$$h(x_1, \dots, x_n, x_0, t) := (x_1, \dots, x_n, x_0, te^{-a(k+1).x}),$$

con inversa  $h^{-1}(x_1, \dots, x_n, x_0, t) := (x_1, \dots, x_n, x_0, te^{a(k+1).x})$ .

Entonces, por las Proposiciones 8 y 7,  $\bar{\Gamma}_R := (G_R \circ h)^{-1}(b)$  tiene  $q$  componentes conexas no compactas y el sistema

$$\begin{cases} G_R \circ h(X, t) = b \\ \xi_{Rt} \circ h(X, t) = c, \end{cases} \quad (1.5)$$

tiene  $N'$  soluciones no degeneradas.

Supongamos que el número de componentes conexas no compactas de la variedad 1-dimensional cerrada  $\bar{\Gamma}_R$  sea finito, entonces, por el Lema 11, existe un hiperplano,

$$H_a : l_1x_1 + \dots + l_nx_n + l_0x_0 + l_t t = a,$$

que corta a  $\bar{\Gamma}_R$  en forma transversal en por lo menos  $q$  puntos.

Es inmediato observar que el espacio tangente a un hiperplano  $H_a$  en cualquiera de sus puntos está formado por todos los vectores que resultan perpendiculares a la normal  $l = (l_1, \dots, l_n, l_0, l_t)$ .

Por lo tanto, el hecho de que en un punto de intersección el corte sea transversal, implica que los espacios tangentes comparten únicamente al vector nulo, con lo cual,  $l$  no es ortogonal a ningún vector no nulo tangente a  $\bar{\Gamma}_R$ . Entonces, si recordamos que el espacio tangente a  $\bar{\Gamma}_R$  es el núcleo del diferencial de  $G_R \circ h$ , las filas de la Matriz Diferencial de  $G_R \circ h$  y  $l$  son linealmente independientes. Así, todo punto en el cual  $H_a$  y  $\bar{\Gamma}_R$  se cortan en forma transversal es una solución no degenerada del sistema:

$$\begin{cases} G_R \circ h(X, t) = b \\ l_1 x_1 \dots + l_n x_n + l_0 x_0 + l_t t = a, \end{cases} \quad (1.6)$$

el cual involucra únicamente  $k$  exponenciales.

Dado que para  $1 \leq i \leq n$ ,  $(G_R)_i(h(X, t)) = P_i(x, y(x), t)$ , donde  $P_i$ , recordemos, es un polinomio de grado  $m_i$ , el sistema (1.6) involucra  $k$  exponenciales. Con lo cual, por la hipótesis inductiva, tiene a lo sumo  $2 \prod_{i=1}^n m_i (4 + \sum_{i=1}^n m_i)^k 2^{k(k-1)/2}$  soluciones no degeneradas, para todo hiperplano  $H_a$ . Así, utilizando el Lema 11,  $\bar{\Gamma}_R$  tiene un número finito de componentes conexas no compactas.

Se concluye que  $q$  es menor o igual que el número de soluciones no degeneradas del sistema (1.6).

De este modo, podemos afirmar que  $N' + q$  es menor o igual que el número de soluciones no degeneradas del sistema:

$$\begin{cases} G_R \circ h(X, t) = b \\ (\xi_{Rt} \circ h(X, t) - c)(l_1 x_1 + \dots + l_n x_n + l_0 x_0 + l_t t - a) = 0, \end{cases}$$

con  $k$  exponenciales.

Analicemos con más detenimiento la última ecuación del sistema.

Si  $1 \leq i, j \leq n$ , la derivada parcial de la coordenada  $j$ -ésima de  $G_R$  con respecto a  $x_i$  es:

$$\begin{aligned} \frac{d(G_R)_j}{dx_i}(X, t) &= \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(x, y(x), ty_{k+1}(x)) + \sum_{r=1}^k \left[ \frac{\partial P_j}{\partial y_r}(x, y(x), ty_{k+1}(x)) \right] a(r)_i y_r(x) + \\ &+ \left[ \frac{\partial P_j}{\partial y_{k+1}}(x, y(x), ty_{k+1}(x)) \right] a(k+1)_i t y_{k+1}(x). \end{aligned}$$

Así,  $\frac{dG_{Rj}}{dx_i}(h(X, t)) = Q_{j,i}(x, y(x), t)$ , donde  $Q_{j,i}$  es el polinomio de grado a lo sumo  $m_i$  que se muestra a continuación:

$$Q_{j,i}(x, y, t) = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(x, y, t) + \sum_{r=1}^k \left[ \frac{\partial P_j}{\partial y_r}(x, y, t) \right] a(r)_i y_r + \left[ \frac{\partial P_j}{\partial y_{k+1}}(x, y, t) \right] a(k+1)_i t,$$

donde  $y = (y_1, \dots, y_k)$ . Entonces,

$$\xi_{Rt}(X, t) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{sg(\sigma)} 2 x_0 \left[ Q_{1,\sigma(1)} \dots Q_{n,\sigma(n)} \right](x, y(x), t),$$

un polinomio de grado a lo sumo  $1 + \sum_{i=1}^n m_i$  evaluado en  $(x, y(x), t)$ .

Así, utilizando la hipótesis inductiva,

$$\begin{aligned} N' + q &\leq 2 \prod_{i=1}^n m_i \left( 2 + \sum_{i=1}^n m_i \right) \left( 5 + 2 \sum_{i=1}^n m_i \right)^k 2^{k(k-1)/2} \\ &= 2 \prod_{i=1}^n m_i \left( 2 + \sum_{i=1}^n m_i \right) \left( \frac{1}{2} \left( 5 + 2 \sum_{i=1}^n m_i \right) \right)^k 2^{k(k+1)/2} \\ &< 2 \prod_{i=1}^n m_i \left( 2 + \sum_{i=1}^n m_i \right) \left( 3 + \sum_{i=1}^n m_i \right)^k 2^{k(k+1)/2} \\ &< 2 \prod_{i=1}^n m_i \left( 3 + \sum_{i=1}^n m_i \right)^{k+1} 2^{k(k+1)/2}. \end{aligned}$$

Entonces, dado que  $m \leq N_R(b) \leq N' + q$ , el sistema  $F_R(X) = p$  tiene a lo sumo

$$2 \prod_{i=1}^n m_i \left( 3 + \sum_{i=1}^n m_i \right)^{k+1} 2^{k(k+1)/2}$$



soluciones no degeneradas, precisamente la cota que propone el Teorema 2 para un sistema de este tipo.

Dado  $p \in \mathbb{R}^n$ , la cota encontrada para el número de soluciones no degeneradas del sistema  $F_R(X) = (p, 0)$  es independiente de  $R$ . Con lo cual, utilizando el Lema 12, el sistema  $F(x) = p$  tiene a lo sumo

$$C := \prod_{i=1}^n m_i \left( 3 + \sum_{i=1}^n m_i \right)^{k+1} 2^{k(k+1)/2},$$

soluciones no degeneradas. Así, para todo  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $N(p) \leq C$ .

Notese que esta cota, la cual obtuvimos usando la hipótesis inductiva, es un poco más grande de lo que deseamos. Con lo cual, seguiremos trabajando.

Supongamos que el sistema  $F(x) = 0$  tiene  $m \geq 1$  soluciones no degeneradas. Entonces, nuevamente por la Proposición 6 i), existe  $W$  un entorno abierto de 0, tal que para todo  $p$  en  $W$ ,  $N(p) \geq m \geq 1$ .

Así como con  $F_R$ , mostremos que existe  $b \in W \cap VR(F) \cap VR(G)$  y  $c \in \mathbb{R}$ , tal que  $(b, c)$  es un valor regular de  $G \times \xi_t$  y  $|c| < \psi(b)$ , para de este modo estar sobre las condiciones del Lema 15.

Dado que  $G$ ,  $F$  y  $\xi_t$  son aplicaciones  $C^\infty$ , por la Proposición 5, sus respectivos conjuntos de valores regulares son una intersección numerable de abiertos densos. Con lo cual,  $V := (VR(F) \times \mathbb{R}) \cap (VR(G) \times \mathbb{R}) \cap VR(G \times \xi_t)$  es una intersección numerable de abiertos densos en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces, utilizando la Proposición 3, denso en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Si el abierto  $(W \times \mathbb{R}) \cap W_\psi$  es no vacío, donde  $W_\psi$  es el conjunto definido en el Lema 17, cualquier  $(b, c) \in V \cap (W \times \mathbb{R}) \cap W_\psi$  es un punto con las características que buscábamos. Veamos entonces que  $(W \times \mathbb{R}) \cap W_\psi \neq \emptyset$ .

El conjunto  $\mathcal{A}$  definido en el Lema 16 es denso en  $\mathbb{R}^n$ , por lo tanto, existe  $b \in W \cap \mathcal{A}$ , el cual verifica que  $N(b) \geq 1$ , simplemente por estar en  $W$ . Así, por ser  $F^{-1}(p) \cap PR(b)$  finito y  $\xi_t(x) \neq 0$  para todo  $x \in PR(F)$ ,

$$\psi(b) := \min_{\substack{F(X)=b \\ X \in PR(F)}} |\xi_t(X, 1)| > 0.$$

Por lo tanto,  $(b, 0) \in W \times \mathbb{R} \cap W_\psi \neq \emptyset$ .

Sea  $(b, c) \in V \cap (W \times \mathbb{R}) \cap W_\psi$ , entonces, por el Lema 14,  $N(b)$  es menor o igual que  $N + q$ , donde  $N$  es el número de soluciones no degeneradas del sistema

$$\begin{cases} G(x, t) = b \\ \psi_t(x, t) = c, \end{cases}$$

y  $q$  es el número de componentes conexas no compactas de la variedad 1-dimensional  $\Gamma := G^{-1}(b)$ .

En adelante, la demostración procede de la misma forma que para el sistema  $F_R(X) = b$ , es por eso que evitaremos detenernos demasiado en los detalles.

Vía el cambio de variables determinado por el  $C^\infty$ -difeomorfismo  $h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  definido por:

$$h(x_1, \dots, x_n, t) := (x_1, \dots, x_n, te^{-a(k+1).x}),$$

y utilizando las Proposiciones 8 y 7,  $\bar{\Gamma} := (G \circ h)^{-1}(b)$  tiene  $q$  componentes conexas no compactas. y el sistema

$$\begin{cases} G \circ h(x, t) = b \\ \xi_t \circ h(x, t) = c, \end{cases} \quad (1.7)$$

tiene  $N$  soluciones no degeneradas.

Por la Proposición 11, existe un hiperplano  $H_a$ , definido como:

$$H_a : l_1x_1 + \dots + l_nx_n + l_1t = a,$$

que corta a la variedad 1-dimensional cerrada  $\bar{\Gamma}$  en forma transversal en por lo menos  $q$  puntos. Así,  $q$  es menor o igual que el número de soluciones no degeneradas del sistema

$$\begin{cases} g \circ h(x, t) = b \\ l_1x_1 + \dots + l_nx_n + l_1t = a. \end{cases}$$

Por lo tanto,  $N + q$  es menor o igual que el número de soluciones no degeneradas del sistema:

$$\begin{cases} g \circ h(x, t) = b \\ (\xi_t \circ (x, t) - c)(l_1 x_1 + \dots + l_n x_n + l_t t - a) = 0, \end{cases}$$

con únicamente  $k$  exponenciales.

Detengámonos un instante en la última ecuación del sistema.

Como  $G_{R_i}(x, x_0, t) = G_i(x, t)$  para  $1 \leq j \leq n$ , podemos concluir que:

$$\frac{dG_{R_j}}{dx_i}(h(X, t)) = Q_{j,i}(x, y(x), t),$$

donde  $Q_{j,i}$  es el polinomio de grado a lo sumo  $m_i$  de la página 39.

Entonces,

$$\xi_t(x, t) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{sg(\sigma)} [Q_{1,\sigma(1)} \dots Q_{n,\sigma(n)}](x, y(x), t),$$

un polinomio de grado a lo sumo  $\sum_{i=1}^n m_i$  evaluado en  $(x, y(x), t)$ .

Así, utilizando la hipótesis inductiva,

$$\begin{aligned} N + q &\leq \prod_{i=1}^n m_i (1 + \sum_{i=1}^n m_i) (2 + 2 \sum_{i=1}^n m_i)^k 2^{k(k-1)/2} \\ &= \prod_{i=1}^n m_i (1 + \sum_{i=1}^n m_i) \left(\frac{1}{2} (2 + 2 \sum_{i=1}^n m_i)\right)^k 2^{k(k+1)/2} \\ &= \prod_{i=1}^n m_i (1 + \sum_{i=1}^n m_i) (1 + \sum_{i=1}^n m_i)^k 2^{k(k+1)/2} \\ &= \prod_{i=1}^n m_i (1 + \sum_{i=1}^n m_i)^{k+1} 2^{k(k+1)/2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que  $m \leq N(b) \leq N + q$ , el sistema con  $k + 1$  exponenciales  $F(x) = 0$  tiene a lo sumo

$$\prod_{i=1}^n m_i (1 + \sum_{i=1}^n m_i)^{k+1} 2^{k(k+1)/2}$$

soluciones no degeneradas.

Concluimos así la demostración del Teorema 2.

□

# Capítulo 2

## Una cota óptima

### 2.1 Sistemas trinomiales en el plano.

El Teorema de Khovanskii, demostrado en el capítulo anterior, expone una cota para el número de soluciones no degeneradas de un sistema polinomial, que depende únicamente de la cantidad de variables y monomios. Esto nos induce a preguntarnos, cuál será la cota óptima para un sistema con una cantidad de monomios y variables determinada.

Con el propósito de dar una respuesta a este interrogante, en al menos un caso particular, el objetivo principal de este capítulo será demostrar el resultado que se enuncia a continuación:

**Teorema 18** *El número máximo de soluciones no degeneradas de un sistema formado por dos ecuaciones trinomiales en dos variables es cinco.*

La demostración, algo rudimentaria, se desarrollará al final del capítulo y estará basada en lo hecho por Li, Rojas y Wang en [8].

#### 2.1.1 Definiciones, notaciones y resultados básicos

Dados  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$ , recordemos la notación:

$$x^a := x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}.$$

Una aplicación  $f \in \mathbb{R}[x^a / a \in \mathbb{R}^n]$  se dirá un **m-nomio**, si tiene exactamente  $m$  monomios. Así, dados  $f_i \in \mathbb{R}[x^a / a \in \mathbb{R}^n]$  para  $1 \leq i \leq n$ , llamaremos al sistema de  $n$  ecuaciones en  $n$  variables  $F := (f_1, \dots, f_n) = 0$  un **sistema esparso de tipo  $(\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n)$** , si cada  $f_i$  es un  $m_i$ -nomio.

Finalmente, notaremos  $\mathcal{N}(m_1, \dots, m_n)$  (resp.  $\mathcal{N}'(m_1, \dots, m_n)$ ) al número máximo de soluciones aisladas (resp. no degeneradas) de un sistema esparso de tipo  $(m_1, \dots, m_n)$  en el ortante positivo  $(\mathbb{R}_+^n)$ .

**Definición 19** Para todo  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , notamos con  $\mathbf{Conv}(S)$  al menor convexo que contiene a  $S$ . Así, dada  $h(x) = \sum_{i=1}^m c_i x^{a(i)}$  en  $\mathbb{R}[x^a / a \in \mathbb{R}^n]$ , un  $m$ -nomio, definimos el polítopo de Newton de  $h$  como la cápsula convexa del su conjunto de exponentes, es decir,

$$\mathbf{Newt}(h) := \mathbf{Conv}\{a(1), \dots, a(m)\}.$$

A continuación se enuncia una versión del conocido Teorema de Rolle para funciones derivables en los reales. Para su demostración ver [3].

**Teorema de Rolle** Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Si  $g$  tiene  $r$  ceros en  $[a, b]$ , entonces  $g'$  tiene por lo menos  $r - 1$  en  $(a, b)$ .

En la demostración del Teorema 18, se utilizará fuertemente la Regla de los Signos de Descartes, resultado que se enuncia luego de la siguiente definición:

**Definición 20** Dado  $f := \sum_{i=0}^m a_i x^i$  un  $m$ -nomio no idénticamente nulo en una variable, llamaremos **cantidad de cambios de signo de  $f$**  al número de pares  $\{i, i'\} \subset \{1, \dots, m\}$  tales que  $i < i'$ ,  $c_j = 0$  si  $i < j < i'$  y  $c_i c_{i'} < 0$ .

Con esta definición, estamos en condiciones de enunciar el siguiente Teorema, cuya demostración fue desarrollada en [11].

**Teorema (Regla de los Signos de Descartes)**

Sea  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  un  $m$ -nomio no idénticamente nulo en una variable. Entonces, la cantidad de ceros de  $f$  es menor o igual que la cantidad de sus cambios de signos.

Si bien el siguiente resultado, como podrá observarse, es un Corolario inmediato de la Regla de los Signos de Descartes, puede ser demostrado por completo utilizando únicamente el Teorema de Rolle.

**Corolario 21** Sea  $f$  un  $m$ -nomio no idénticamente nulo en una variable. Entonces, la cantidad de ceros de  $f$  es menor o igual que  $m - 1$ .

Observar que esto nos garantiza que todo  $m$ -nomio no nulo en una variable tiene un número finito de ceros, razón por la cual todos los  $m$ -nomios de este tipo tiene todos sus ceros aislados.

## 2.1.2 Resultados previos

La Proposición que se enuncia a continuación nos va a permitir modificar los exponentes en los monomios de un sistema esparso, sin cambiar su número de soluciones aisladas y no degeneradas, así como tampoco el tipo de sistema.

**Proposición 22** Sean  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz inversible y  $e_j \in \mathbb{R}^n$ , el  $j$ -ésimo vector canónico. Entonces, la aplicación  $\phi_A : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ , definida por:

$$\phi_A(x) = x^A, \quad \text{donde } x^A := (x^{e_1 \cdot A^t}, \dots, x^{e_j \cdot A^t}, \dots, x^{e_n \cdot A^t}),$$

es un  $C^\infty$ -difeomorfismo.

**Demostración.** Dada  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , observemos la coordenada  $i$ -ésima del vector  $(x^A)^B$ :

$$\begin{aligned} ((x^A)^B)_i &= (x^{e_1 \cdot A^t}, \dots, x^{e_j \cdot A^t}, \dots, x^{e_n \cdot A^t})^{e_i \cdot B^t} = \\ &= x^{b_{1i} e_1 \cdot A^t} \dots x^{b_{ji} e_j \cdot A^t} \dots x^{b_{ni} e_n \cdot A^t} = \\ &= x^{(b_{1i}, \dots, b_{ji}, \dots, b_{ni}) \cdot A^t} = x^{e_i \cdot B^t \cdot A^t} = x^{e_i \cdot (A \cdot B)^t} = (x^{(A \cdot B)})_i \end{aligned}$$

Así,  $\phi_{A^{-1}} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ , definida por  $\phi_{A^{-1}}(y) = y^{A^{-1}}$  es la inversa de  $\phi_A$ .

Es inmediato observar que tanto  $\phi_A$  con  $\phi_{A^{-1}}$  son aplicaciones  $C^\infty$ . Con lo cual,  $\phi_A$  resulta un  $C^\infty$ -difeomorfismo. □

Dado un sistema de ecuaciones polinomiales, bajo ciertas condiciones, el siguiente Lema garantiza la existencia de otro sistema, del mismo tipo, con igual número de soluciones tanto aisladas como no degeneradas, tal que una de sus ecuaciones es lineal.

Se define la dimensión del polítopo de Newton de un  $m$ -nomio  $h$ , como la dimensión del menor espacio afín que lo contiene, y se nota  $\dim(\text{Newt}(h))$ .

**Lema 23** Sea  $F = (f_1, \dots, f_n) = 0$  un sistema esparso de tipo  $(m_1, \dots, m_n)$  tal que la dimensión  $New(f_1)$  es  $m_1 - 1$ . Entonces, existe  $\bar{F} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) = 0$ , un sistema esparso del mismo tipo con igual número de soluciones aisladas y no degeneradas, tal que

$$\bar{f}_1 = 1 \pm x_1 \pm \dots \pm x_{m_1-1},$$

y, para todo  $i$ ,  $\bar{f}_i$  tiene al 1 como uno de sus monomios.

Además, si  $m_1 = 3$  y el sistema  $F(x) = 0$  tiene alguna solución,

$$\bar{f}_1 := 1 - x_1 - x_2.$$

**Demostración.** Dividiendo cada  $f_i$  por alguno de sus monomios no modificamos el conjunto de soluciones del sistema en el ortante positivo y podemos asegurar que cada  $f_i$  posee un 1 como uno de sus monomios. En el caso donde  $m_1 = 3$ , podemos suponer que  $f_1$  no tiene todos los coeficientes del mismo signo, de lo contrario el sistema no tendría soluciones en  $\mathbb{R}_+^n$ . Entonces, dividiendo por el monomio con coeficiente de signo distinto al de los otros dos, obtenemos  $f_1 := 1 - c_1x^{a_1} - c_2x^{a_2}$  con  $c_1, c_2 > 0$ .

Cabe observar que al dividir por un monomio, el polítopo de Newton del nuevo  $m_i$ -nomio, simplemente es un trasladado del anterior.

Supongamos que  $f_1 := 1 \pm c_1x^{a_1} \pm \dots \pm c_{m_1-1}x^{a_{m_1-1}}$ . Como  $\dim New(f_1) = m_1 - 1$ , el conjunto  $\{a_1, \dots, a_{m_1-1}\} \subset \mathbb{R}^n$  resulta linealmente independiente, con lo cual, puede ser completado a una base, la cual notaremos  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Entonces, vía el cambio de variable  $x \rightarrow x^{A^{-1}}$  donde  $A$  es la matriz que tiene en la  $i$ -ésima columna al vector  $a_i$ , por la Proposición 22, no modifica el número de soluciones en  $\mathbb{R}_+^n$ . Así, podemos suponer  $f_1 := 1 \pm c_1x_1 \pm \dots \pm c_{m_1-1}x_{m_1-1}$ .

Por último, si aplicamos la sustitución  $x_i \rightarrow \frac{x_i}{|c_i|}$  con  $1 \leq i < m_i$  obtenemos el  $f_1$  deseado, sin modificar el número de soluciones no degeneradas y aisladas.  $\square$

El siguiente Lema nos permite relacionar el número máximo de soluciones aisladas de sistemas de tipo  $(3, m)$  con el número máximo de soluciones no degeneradas de sistemas del mismo tipo.

**Lema 24** Sea  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $r$  ceros aislados, definida de la siguiente forma:

$$f(x) = 1 + c_1x^{a_1}(1-x)^{b_1} + \dots + c_kx^{a_k}(1-x)^{b_k},$$

donde  $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$  y  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Entonces, existen  $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_k \in \mathbb{R} - \{0\}$  para los cuales  $\tilde{f}(x) = 1 + \tilde{c}_1 x^{a_1} (1-x)^{b_1} + \dots + \tilde{c}_k x^{a_k} (1-x)^{b_k}$  tiene todos sus ceros no degenerados y por lo menos  $r$  en el intervalo  $(0, 1)$ .

**Demostración.** Sea  $x$  un cero aislado de  $f$  que resulta un mínimo local, entonces, existe  $\delta > 0$ , tal que  $f > 0$  en el entorno punteado  $B(x, \delta)^* := B(x, \delta) - \{x\}$ . Así, por la continuidad de  $f$ , para todo  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , tal que

$$0 < \epsilon < \min\{f(x - \delta), f(x + \delta)\},$$

existen  $\alpha \in [x - \delta, x]$  y  $\beta \in [x, x + \delta]$  ceros de  $f - \epsilon$ .

Algo similar ocurre si el cero aislado  $x$  es un máximo local. Aunque esta vez tomando  $\epsilon$  de la siguiente forma:

$$\max\{f(x - \delta), f(x + \delta)\} < \epsilon < 0.$$

Si  $0 < x_1 < \dots < x_r < 1$  son  $r$  ceros de  $f$ , sea  $\eta_+$  (resp.  $\eta_-$ ) el número estos ceros que resultan mínimos locales (resp. máximos locales). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\eta_+ \geq \eta_-$ , ya que de lo contrario, simplemente multiplicando  $f$  por  $-1$  no modificamos el conjunto de soluciones y obtenemos lo que buscábamos.

Utilizando que el intervalo  $(0, 1)$  es abierto, existe

$$0 < \delta < \min\{x_1, 1 - x_r\},$$

tal que, si  $i \neq j$ ,  $B[x_i, \delta] \cap B[x_j, \delta] = \emptyset$ , y si  $x_i$  es uno de los ceros de  $f$  para los cuales existe un entorno punteado donde  $f$  es positiva,  $B[x_i, \delta]^*$  es uno de esos entornos.

Dado  $x_i$  uno de los ceros aislados de  $f$  que resultan mínimos locales, como  $B[x_i, \delta]$  está contenida en  $(0, 1)$ , sea:

$$k_i := \min\{f(x_i - \delta), f(x_i + \delta)\} > 0.$$

Y, dado  $x_i$  uno de los ceros aislados de  $f$  que no es ni mínimo, ni máximo local, sea:

$$k_i := \max\{f(x) / x \in B[x_i, \delta]\} > 0.$$

Dado el real positivo  $k$  definido por:

$$k := \min\{k_i / x_i \text{ no es un máximo local de } f\},$$



por lo observado anteriormente, dado  $\epsilon \in (0, k)$ , para  $x_i$  un mínimo local de  $f$ ,  $f - \epsilon$  tiene por lo menos dos ceros en  $B[x_i, \delta]$ . Y, si  $x_i$  no es un extremo local,  $f - \epsilon$  tiene por lo menos un cero en  $B[x_i, \delta]$ .

Así, dado  $\epsilon \in (0, k)$ ,  $f - \epsilon$  tiene por lo menos

$$2\eta_+ + (r - \eta_- - \eta_+) = r + \eta_+ - \eta_- \geq r$$

ceros en el intervalo  $(0, 1)$ .

De la Proposición 5 se desprende que existe  $\epsilon \neq 1$  en  $(0, k)$  un valor regular de  $f$ . Por lo tanto,

$$f - \epsilon = (1 - \epsilon) - c_1 x^{a_1} (1 - x)^{b_1} + \dots + c_k x^{a_k} (1 - x)^{b_k}$$

tiene todos sus ceros no degenerados y por lo menos,  $r$  en el intervalo  $(0, 1)$ .

Entonces,

$$\tilde{f} := \frac{f - \epsilon}{1 - \epsilon} = 1 + \frac{c_1}{1 - \epsilon} x^{a_1} (1 - x)^{b_1} + \dots + \frac{c_k}{1 - \epsilon} x^{a_k} (1 - x)^{b_k},$$

satisface los pedido.

□

**Observación 25** La aplicación  $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  definida por

$$h(x) := \frac{1 - x}{x},$$

es un  $C^\infty$ -difeomorfismo. Por lo tanto, dada  $F : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ , el número de ceros no degenerados de  $F(u)$  en  $\mathbb{R}_{>0}$  coincide con el de  $F \circ h(x)$  en  $(0, 1)$ .

**Demostración.** Es inmediato que  $h(x)$  es un  $C^\infty$ -difeomorfismo con inversa  $h^{-1}(y) = \frac{1}{1+y}$ . Y, la última afirmación es corolario de la Proposición 7.

□

Recordemos que un polinomio no nulo  $p(x)$  en  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  se dice **homogéneo** de grado  $d$  si y solo si  $p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d p(x_1, \dots, x_n)$ .

**Lema 26** Sea  $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$  un polinomio homogéneo de grado  $d$ . Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  existe un polinomio homogéneo  $q \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ , idénticamente nulo o de grado  $d + 1$  tal que  $\frac{d}{dx}(x^\alpha (1 - x)^\beta p(x, 1 - x)) = x^{\alpha-1} (1 - x)^{\beta-1} q(x, 1 - x)$ .

**Demostración.** Veamos primero que si  $d \geq 1$  entonces  $\frac{\partial p}{\partial x_i}$  es un polinomio homogéneo de grado  $d - 1$  o nulo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1}(\lambda x_1, \lambda x_2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(\lambda x_1 + h, \lambda x_2) - p(\lambda x_1, \lambda x_2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(\lambda x_1 + \lambda h, \lambda x_2) - p(\lambda x_1, \lambda x_2)}{\lambda h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda^d (p(x_1 + h, x_2) - p(x_1, x_2))}{\lambda h} = \lambda^{d-1} \frac{\partial p}{\partial x_1}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

De la misma forma se muestra para  $x_2$ .

Comencemos ahora si con la demostración del Lema.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(x^\alpha(1-x)^\beta p(x, 1-x)) = \\ &= x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(\alpha(1-x)p(x, 1-x) - \beta x p(x, 1-x) + x(1-x)(\frac{\partial p}{\partial x_1}(x, 1-x) - \frac{\partial p}{\partial x_2}(x, 1-x))) \end{aligned}$$

Únicamente hay que verificar que

$$q(x_1, x_2) := (\alpha x_2 - \beta x_1)p(x_1, x_2) + x_1 x_2 (\frac{\partial p}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial p}{\partial x_2}(x_1, x_2))$$

es un polinomio homogéneo idénticamente nulo o de grado  $d+1$ , lo cual es inmediato teniendo en cuenta que  $\frac{\partial p}{\partial x_i}(x_1, x_2)$  es nulo u homogéneo de grado  $d - 1$  y  $p$  es homogéneo de grado  $d$ .

□

Se desprende en forma inmediata de el Lema 26, que si  $p(x_1, x_2)$  es un polinomio homogéneo de grado  $d$ , dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{d^k}{dx} x^\alpha (1-x)^\beta p(x, 1-x) = x^{\alpha-k} (1-x)^{\beta-k} q(x, 1-x),$$

donde  $q(x_1, x_2)$  si no es nulo, es un polinomio homogéneo de grado  $d + k$ .

La siguiente Proposición será de suma importancia para la demostración del Teorema 18.

Se puede observar que la demostración de la Proposición 27 es constructiva.

**Proposición 27** Sea  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación definida por:

$$f(x) = 1 + c_1 x^{a_1} (1-x)^{b_1} + \dots + c_k x^{a_k} (1-x)^{b_k},$$

donde  $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$  y  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , con  $r$  ceros.

Entonces, existe un polinomio  $q(x)$  en  $\mathbb{R}[x]$  de grado a lo sumo  $2^j - 1$ , para algún  $j \leq k$ , con por lo menos  $r - (2^j - 1)$  ceros en  $(0, 1)$ .

**Demostración.** Por el Teorema de Rolle,

$$f'(x) = \sum_{i=1}^k c_i x^{a_i-1} (1-x)^{b_i-1} (a_i(1-x) - b_i x),$$

tiene por lo menos  $r - 1$  ceros.

Por lo tanto, si dividimos  $f'(x)$  por  $x^{a_k-1} (1-x)^{b_k-1}$  (que no tiene ceros en  $(0, 1)$ ), obtenemos:

$$g_1(x) := c_k (a_k(1-x) - b_k x) + \sum_{i=0}^{k-1} x^{a_i-a_k} (1-x)^{b_i-b_k} c_i (a_i(1-x) - b_i x).$$

con por lo menos  $r - 1 = r - (2^1 - 1)$  ceros. Es más, podemos observar que  $g_1$  es de la forma:

$$g_1(x) = q_{k,1}(x, 1-x) + \sum_{i=1}^{k-1} x^{\alpha_i} (1-x)^{\beta_i} q_{i,1}(x, 1-x),$$

donde  $q_{j,1}(x_1, x_2)$  es homogéneo de grado  $1 = 2^1 - 1$ .

Entonces si lo derivamos 2 veces, eliminamos por lo menos un monomio y, por el Lema 26, el resultado es de la forma:

$$g_1''(x) = \sum_{i=1}^{k-1} x^{a_i-a_k-2} (1-x)^{b_i-b_k-2} q_{i,2}(x, 1-x),$$

donde  $q_{i,2}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$  es un polinomio homogéneo de grado  $3 = 2^2 - 1$  o en su defecto nulo.

Si  $g_1''(x)$  es idénticamente nulo, entonces  $g_1$  es un polinomio de grado a lo sumo  $1 = 2^1 - 1$  con por lo menos  $r - 1 = r - (2^1 - 1)$  ceros, caso en el cual queda demostrado el Teorema.

Si  $g_1''(x)$  no es idénticamente nulo, por el Teorema de Rolle, tiene por lo menos  $r - 3 = r - (2^2 - 1)$  ceros.

Dado que es no nulo, sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $q_{k-1,2} \neq 0$ . Así, si dividimos  $g_1''(x)$  por  $x^{a_{k-1}-a_k-2}(1-x)^{b_{k-1}-b_k-2}$  obtenemos:

$$g_2(x) := q_{k-1,2}(x, 1-x) + \sum_{i=1}^{k-2} x^{\alpha_i - a_{k-1}} (1-x)^{b_i - b_{k-1}} q_{i,2}(x, 1-x),$$

con por lo menos  $r - (2^2 - 1)$  ceros y  $q_{i,2}$  un polinomio homogéneo de grado a lo sumo  $2^2 - 1$  o en su defecto nulo.

Observar que para  $k = 2$ ,  $g_2(x) = q_{1,2}(x, 1-x)$ , un polinomio de grado  $2^2 - 1$  con  $r - (2^2 - 1)$  ceros.

Construyamos  $g_{j+1}$  a partir de  $g_j$ . Dado  $j < k$ , sea

$$g_j(x) := q_{k-j+1,j}(x, 1-x) + \sum_{i=1}^{k-j} x^{\alpha_i} (1-x)^{\beta_i} q_{i,j}(x, 1-x),$$

con por lo menos  $r - (2^j - 1)$  ceros, donde  $q_{s,j}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ , para  $1 \leq s \leq k - j + 1$ , son polinomios homogéneos de grado  $2^j - 1$  si no nulos. Entonces, por el Lema 26, la derivada  $2^j$ -ésima de  $g_j$ , la cual la vamos a notar  $dg_j$ , es de la forma

$$dg_j := \sum_{i=1}^{k-j} x^{\alpha_i - 2^j} (1-x)^{\beta_i - 2^j} q_{i,j+1}(x, 1-x),$$

donde  $q_{i,j+1}(x_1, x_2)$  es un polinomio homogéneo de grado  $2^j - 1 + 2^j = 2^{j+1} - 1$  o en su defecto nulo. Observar también que eliminamos un sumando.

Si  $dg_j$  es idénticamente nulo, podemos afirmar que  $g_j$  es un polinomio de grado a lo sumo  $2^j - 1$ , caso en el cual queda demostrado el Teorema.

Si  $dg_j$  no es idénticamente nulo, por el Teorema de Rolle, podemos asegurar que tiene por lo menos por lo menos  $r - (2^j - 1) - 2^j = r - (2^{j+1} - 1)$  ceros.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $q_{k-j,j+1} \neq 0$ . Así, si dividimos  $dg_j$  por  $x^{\alpha_j - 2^j} (1-x)^{\beta_j - 2^j}$ , obtenemos

$$g_{j+1}(x) = q_{k-j,j+1}(x, 1-x) + \sum_{i=1}^{k-(j+1)} x^{\bar{\alpha}_i} (1-x)^{\bar{\beta}_i} q_{i,j+1}(x, 1-x),$$

con las características que esperamos.

Por lo tanto, dado que  $g_1$  tiene a lo sumo  $k$  monomios, y cada vez que pasamos de  $g_j$  a  $g_{j+1}$  eliminamos por lo menos uno, sucede alguna de las siguientes dos posibilidades:

- Existe  $j < k$ , tal que  $g_j$  es un polinomio de grado a lo sumo  $2^j - 1$  con por lo menos  $2^j - 1$  ceros.
- $g_k(x)$  es un polinomio homogéneo de grado  $2^k - 1$  con por lo menos  $2^k - 1$  ceros.

Observemos que la construcción de  $g_{j+1}$  a partir de  $g_j$  no es única, dado que la elección del sumando que luego de las sucesivas derivadas se elimina es arbitraria. Así, el polinomio  $q(x)$  de grado  $2^j - 1$  del enunciado de la Proposición no sea único.

□

### 2.1.3 Algunas funciones útiles

A continuación se definen algunas aplicaciones y notaciones que serán utilizadas con frecuencia en las demostraciones del Teorema 18 y los Lemmas siguientes.

Para el caso particular en que

$$f(x) = 1 - Ax^a(1-x)^b - Bx^c(1-x)^d,$$

con  $r$  ceros en  $(0, 1)$ , podemos observar, siguiendo el mismo razonamiento que en la demostración anterior, que

$$\begin{aligned} g(x) &:= -(c(1-x) - dx) + x^{a-c}(1-x)^{b-d} \frac{A}{B} (-a(1-x) + bx), \\ \tilde{g}(x) &:= -(a(1-x) + bx) - x^{c-a}(1-x)^{b-d} \frac{B}{A} (-c(1-x) + dx), \end{aligned}$$

tienen por lo menos  $r - 1$  ceros en  $(0, 1)$ . Simplemente por ser el resultado de multiplicar  $f'(x)$  por un monomio de la forma  $\gamma x^\alpha(1-x)^\beta$ , con  $\gamma \neq 0$ .

Notemos con  $N$  al mínimo entre el número de ceros de  $g(x)$  y  $\tilde{g}(x)$  en  $(0, 1)$ . Así  $r - 1 \leq N$ , luego  $r \leq N + 1$ .

Por Rolle, podemos concluir que la derivada segunda de  $g$  y  $\tilde{g}$  tienen, cada una de ellas, por lo menos  $r - 3$  ceros en  $(0, 1)$ , por lo tanto,

$$\begin{aligned}
g_2(x) &:= \frac{B}{A} x^{c-a-1} (1-x)^{d+2-b} g''(x) = \\
&= -a(a-c)(a-c-1) \left(\frac{1-x}{x}\right)^3 + (a-c)[2a(b-d+1) + b(a-c+1)] \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 + \\
&\quad + (d-b)[a(b-d+1) + 2b(a-c+1)] \left(\frac{1-x}{x}\right) + b(b-d)(b-d-1), \\
\tilde{g}_2(x) &:= \frac{A}{B} x^{a-c-1} (1-x)^{b+2-d} \tilde{g}''(x) = \\
&= -c(c-a)(c-a-1) \left(\frac{1-x}{x}\right)^3 + (c-a)[2c(d-b+1) + d(c-a+1)] \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 + \\
&\quad + (b-d)[c(d-b+1) + 2d(c-a+1)] \left(\frac{1-x}{x}\right) + d(d-b)(d-b-1),
\end{aligned}$$

tienen por lo menos  $r - 3$  ceros en  $(0, 1)$ .

Observar que tanto  $g_2$  como  $\tilde{g}_2$  coinciden con la evaluación en  $\frac{1-x}{x}$  de un polinomio en una variable de grado a lo sumo 3, si no es nulo, con coeficientes en  $\mathbb{R}[a, b, c, d]$ .

Así, utilizando la observación 25, podemos concluir que  $P(u)$  y  $\tilde{P}(u)$ , los polinomios antes mencionados que corresponden respectivamente a  $g_2$  y a  $\tilde{g}_2$ , tiene por lo menos  $r - 3$  ceros en  $\mathbb{R}_{>0}$ . Expresemos en forma explícita tales polinomios:

$$\begin{aligned}
P(u) &:= -a(a-c)(a-c-1)u^3 + (a-c)[2a(b-d+1) + b(a-c+1)]u^2 + \\
&\quad + (d-b)[a(b-d+1) + 2b(a-c+1)]u + b(b-d)(b-d-1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(u) &:= -c(c-a)(c-a-1)u^3 + (c-a)[2c(d-b+1) + d(c-a+1)]u^2 + \\
&\quad + (b-d)[c(d-b+1) + 2d(c-a+1)]u + d(d-b)(d-b-1).
\end{aligned}$$

Llamaremos  $M$  al mínimo entre el número de ceros de  $P(u)$  y  $\tilde{P}(u)$  en  $\mathbb{R}_{>0}$ . Con lo cual, podemos observar que  $r - 3 \leq M$ , luego  $r \leq M + 3$ .

### 2.1.4 Una nueva cota a los sistemas de tipo $(3, m)$

En el siguiente Teorema consideramos sistemas de dos ecuaciones en dos variables, donde la primer ecuación está dada por un trinomio y la segunda por un  $m$ -nomio cualquiera. El objetivo de este último resultado es bajar la cota que proporciona el

Teorema de Khovanskii para el número de soluciones no degeneradas a este tipo de sistemas.

**Teorema 28** *El número máximo de soluciones aisladas de sistemas de tipo  $(3, m)$ , con  $m \geq 3$ , es menor o igual a  $2^m - 2$  y coincide con el número máximo de soluciones no degeneradas de sistemas del mismo tipo.*

*Además, si la dimensión del polítopo de Newton del trinomio es 1, el sistema tiene a lo sumo  $2(m - 1)$  ceros aislados.*

**Demostración.** Sea  $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$  un sistema esparso de dos ecuaciones en dos variables de tipo  $(3, m)$  con  $m \geq 3$ .

Si  $\dim \text{New}(f_1) = 1$ , entonces los exponentes de los 3 monomios de  $f_1$  están alineados. Así, si dividimos a  $f_1$  por alguno de sus monomios, no modificamos el conjunto de ceros, y el resultado, el cual mediante un abuso de notación lo llamaremos nuevamente  $f_1$ , es de la forma:

$$f_1(x_1, x_2) = 1 + c_1 x_1^{\alpha a_1} x_2^{b_1} + c_2 x_1^{\alpha a_1} x_2^{\alpha b_1},$$

con  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Se puede observar que  $(a_1, b_1)$  es no nulo, de lo contrario,  $f_1$  tendría un único monomio.

Sea  $A$  en  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  una matriz inversible que verifica que:

$$(a_1, b_1) \cdot A^t = (1, 0).$$

Entonces, por la Proposición 22, la aplicación  $\phi_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\phi_A(x) = x^A$ , es un  $C^\infty$ -difeomorfismo. Así, utilizando la Proposición 7 podemos afirmar que el sistema

$$f_1 \circ \phi_{A^{-1}}(x_1, x_2) = f_2 \circ \phi_{A^{-1}}(x_1, x_2) = 0$$

tiene la misma cantidad de soluciones aisladas y no degeneradas que el sistema original. Es más, podemos observar que este cambio de variables no altera el número de monomios de cada  $f_i$ . Veamos como se modifica  $f_1(x_1, x_2)$  luego de la composición. Dado que  $\phi_A(x) := (x^{e_1 \cdot A^t}, x^{e_2 \cdot A^t})$ , podemos observar que:

$$\begin{aligned} f_1 \circ \phi_A(x) &= 1 + c_1 x^{a_1(e_1 \cdot A^t)} x^{b_1(e_2 \cdot A^t)} + c_2 x^{\alpha a_1(e_1 \cdot A^t)} x^{\alpha b_1(e_2 \cdot A^t)} = \\ &= 1 + c_1 x^{(a_1, b_1) \cdot A^t} + c_2 x^{\alpha(a_1, b_1) \cdot A^t} = 1 + c_1 x^{(1, 0)} + c_2 x^{(\alpha, 0)}. \end{aligned}$$

Con lo cual, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$f_1(x_1, x_2) = 1 + c_1x_1 + c_2x_1^\alpha.$$

Si pensamos a  $f_1$  como una función en una variable, por el Corolario 21,  $f_1(x_1)$  tiene a lo sumo dos ceros. Además, dado  $\xi \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $f_2(\xi, x_2)$  depende únicamente de  $x_2$  y si tiene a lo sumo  $m$  monomios. Con lo cual, una vez más, por el Corolario 21, el número de ceros aislados de  $f_2(\xi, x_2)$  es menor o igual a  $m - 1$ .

Así, el sistema

$$f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$$

tiene un número finito de ceros aislados y no mayor a  $2(m - 1)$ .

Si  $\dim \text{Newt}(f_1) = 2$ , por el Lema 23, podemos suponer a los  $f_i$  de la forma:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 1 - x_1 - x_2, \\ f_2(x_1, x_2) &= 1 + c_1x_1^{a_1}x_2^{b_2} + \dots + c_{m-1}x_1^{a_{m-1}}x_2^{b_{m-1}}. \end{aligned}$$

Un punto  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{>0}^2$  es cero de  $f_1$  si y solo si  $x_2 = 1 - x_1$  con  $x_1 \in (0, 1)$ . Así, las soluciones del sistema esparso son de la forma  $(x_1, 1 - x_1)$  con  $x_1 \in (0, 1)$  tal que  $f_2(x_1, 1 - x_1) = 0$ . Además, se puede observar que si  $(x_1, 1 - x_1)$  es un cero aislado del sistema, entonces  $x_1$  resulta un cero aislado de  $f_2(x_1, 1 - x_1)$ . Así, nos alcanza con ver que  $f_2(x_1, 1 - x_1)$  tiene a lo sumo  $2^m - 2$  ceros en  $(0, 1)$ .

Si  $r$  es el número de ceros de  $f_2(x_1, 1 - x_1)$ , por la Proposición 27, existe un polinomio  $q(x_1)$  en  $\mathbb{R}[x_1]$  de grado a lo sumo  $2^j - 1$ , para algún  $j \leq m - 1$ , con por lo menos  $r - (2^j - 1)$  ceros en  $(0, 1)$ . Así,  $q(x_1)$  tiene a lo sumo  $2^j - 1$  ceros, y podemos concluir que  $r - (2^j - 1) \leq 2^j - 1$ . Con lo cual,  $r \leq 2^{j+1} - 2 \leq 2^m - 2$ .

Solo nos resta verificar que  $N(3, m) = N'(3, m)$ , es decir, que el número máximo de soluciones aisladas de sistemas de tipo  $(3, m)$  coincide con el de las no degeneradas.

Por la Proposición 4, toda solución no degenerada es aislada. Así, resulta inmediato que  $N'(3, m) \leq N(3, m)$ . Verifiquemos la otra desigualdad.

Utilizando la Proposición 24, podemos afirmar que mediante una permutación apropiada de los coeficientes de  $f_2$  obtenemos:

$$\tilde{f}_2(x, 1 - x) := 1 - \tilde{c}_1x^{a_1}(1 - x)^{b_1} + \dots + \tilde{c}_{m-1}x^{a_{m-1}}(1 - x)^{b_{m-1}},$$



con todos sus ceros no degenerados y por lo menos  $r$  en el  $(0, 1)$ . Con lo cual, si podemos mostrar que todo cero no degenerado de  $f_2(x, 1 - x)$  en  $(0, 1)$  produce una solución  $(x, 1 - x)$  no degenerada del sistema de tipo  $(3, m)$ :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 1 - x_1 - x_2 = 0 \\ \tilde{f}_2(x_1, x_2) &= 1 - \tilde{c}_1 x_1^{a_1} x_2^{b_1} + \dots + \tilde{c}_{m-1} x_1^{a_{m-1}} x_2^{b_{m-1}} = 0, \end{aligned}$$

podríamos concluir que  $r \leq N'(3, m)$ . Y, como consecuencia,  $N(3, m) \leq N'(3, m)$ . Sea  $x$  un cero no degenerado de  $\tilde{f}_2(x, 1 - x)$  en  $(0, 1)$ , entonces la Matriz Diferencial tiene rango maximal, o equivalentemente, la derivada no se anula en  $x$ . Utilizando la Regla de la Cadena, podemos observar que:

$$0 \neq \frac{d}{dx} \tilde{f}_2(x, 1 - x) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_1}(x, 1 - x) - \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_2}(x, 1 - x) = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} (x, 1 - x),$$

precisamente, el determinante de la Matriz Diferencial del sistema  $f_1(x_1, x_2) = \tilde{f}_2(x_1, x_2)$  en la solución  $(x, 1 - x)$ , con lo que damos por terminada la demostración.  $\square$

A continuación haremos la demostración del Teorema 18 en la cual se utilizará asiduamente las definiciones y notaciones de la sección 2.1.3.

**Demostración del Teorema 18.** El Contraejemplo de Haas a la conjetura de Kushnirenko es precisamente un sistema de tipo  $(3, 3)$  con 5 soluciones no degeneradas. Así, se concluye que  $N(3, 3) \geq 5$ . El contraejemplo de Haas está desarrollado en [5].

Con lo cual, nos resta solo verificar la otra desigualdad.

Sea  $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$  un sistema esparso de tipo  $(3, 3)$ .

Si  $\dim \text{Newt}(f_1) \leq 1$ , por el Teorema 28, el sistema tiene a lo sumo  $2(3 - 1) = 4$  soluciones aisladas.

Si  $\dim \text{Newt}(f_1) = 2$ , por el Lema 23, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $f_1$  es de la siguiente forma:

$$f_1(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2.$$

Es más, si el sistema tiene alguna solución en  $\mathbb{R}_{>0}^2$ , los coeficientes de los monomios de  $f_2$  no pueden ser todos del mismo signo. Así, si dividimos  $f_2$  por el monomio con coeficiente de signo distinto a los otros dos, no modificamos el conjunto de soluciones del sistema, y el resultado, al que nuevamente notamos  $f_2$ , tiene la siguiente forma:

$$f_2(x_1, x_2) = 1 - Ax_1^a x_2^b - Bx_1^c x_2^d,$$

con  $A, B \in \mathbb{R}_{>0}$  y  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Sea  $r$  el número de soluciones aisladas del sistema, que por el Teorema 28, no solo es finito, sino menor o igual a  $2^3 - 2 = 6$ .

De la misma forma que en la demostración del Teorema 28, se puede observar que  $(x_1, x_2)$  es una solución aislada del sistema en  $\mathbb{R}_{>0}^2$  si y solo si  $x_2 = 1 - x_1$ , con  $x_1 \in (0, 1)$  un cero aislado de

$$f(x) := f_2(x, 1 - x) = 1 - Ax^a(1 - x)^b - Bx^c(1 - x)^d.$$

Con lo cual, dado que uno tiene una correspondencia entre los ceros aislados de  $f(x)$  en  $(0, 1)$  y las soluciones aisladas del sistema  $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$  en el cuadrante positivo,  $f(x)$  tiene  $r$  ceros aislados en  $(0, 1)$  y nos alcanza con mostrar que  $r \leq 5$ .

Sin pérdida de generalidad, utilizando el Lema 24, podemos suponer que  $f$  tiene todos sus ceros no degenerados, luego aislados.

Por las observaciones y las funciones definidas en la sección 2.1.3, podemos afirmar que es suficiente mostrar que  $N \leq 4$  o  $M \leq 2$ . Donde  $N$  y  $M$  son precisamente los valores introducidos en esa sección.

Nuevamente, utilizando las definiciones de la sección 2.1.3, si  $P$  es el polinomio nulo entonces  $g$  resulta lineal. Con lo cual,  $N \leq 1$ , luego  $r \leq 2$ . Lo mismo ocurre con  $\tilde{P}$ . Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que tanto  $P$  como  $\tilde{P}$  son polinomios no nulos.

A continuación vamos a verificar que  $r \leq 5$  en cada uno de los casos que resulten de suponer a los valores  $a, b, c$  y  $d$  positivo, negativo o cero, utilizando fuertemente que nos alcanza con ver que  $N \leq 4$  o  $M \leq 2$ .

Si suponemos que los exponentes  $a, b, c$  y  $d$  son todos no nulos, tenemos un total de  $2^4 = 16$  casos posibles para analizar. Con lo cual, considerando el caso donde alguno de los exponentes es nulo, resulta un total de 17 casos.

En la siguiente lista se pueden observar los 17 casos antes mencionados, donde 9 de ellos se encuentran entre llaves a la derecha de algunos ítems. Esto se debe a que vía una simetría se los puede reducir al caso del ítem en el que se encuentran, para de este modo evitar repetir la gran cantidad de cuentas que requiere el análisis de la mayoría de estos casos.

Con simetría nos referimos a un intercambio de  $x_1$  por  $x_2$ , o un intercambio del segundo por el tercer monomio en  $f_2$ .

Por ejemplo, el caso  $a, b, d > 0; c < 0$  se reduce a  $a, b, c > 0; d < 0$  intercambiando  $x_1$  por  $x_2$ .

- 1) Al menos uno de los números  $a, b, c, d$  es cero.
- 2)  $a, b, c > 0, d < 0$        $\{a, b, d > 0, c < 0; a, c, d > 0, b < 0; b, c, d > 0, a < 0\}$
- 3)  $a, c > 0, b, d < 0$        $\{b, d > 0, a, c < 0\}$
- 4)  $a, b > 0, c, d < 0$        $\{a, b > 0, c, d < 0\}$
- 5)  $a, b, c, d > 0$
- 6)  $a, b, c, d < 0$
- 7)  $a > 0, b, c, d < 0$        $\{b > 0, a, c, d < 0; c > 0, a, b, d < 0; d > 0, a, b, c < 0\}$
- 8)  $a, d > 0, b, c < 0$        $\{b, c > 0, a, d < 0\}$

Alguno de estos 8 casos, como antes mencionamos, requieren de una gran cantidad de cuentas, es por eso que los analizaremos en los Lemas siguientes a esta demostración.

- 1) Al menos uno de los valores  $a, b, c, d$  es cero:

Bajo estas condiciones el coeficiente de orden 3 o 0 de  $P$  o  $\tilde{P}$  es nulo, entonces, por la Regla de los Signos de Descartes,  $P$  o  $\tilde{P}$  tiene a lo sumo dos raíces en  $R_{>0}$ . Resultando de este modo  $M < 3$ .

- 2)  $a, b, c > 0; d < 0$ :

Dado que, por el Teorema 28,  $r$  resulta menor o igual a 6, nos alcanza con verificar que  $r \neq 6$ .

Se puede observar que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty,$$

entonces, teniendo en cuenta que  $f$  tiene todos sus ceros no degenerados (simples), es inmediato observar que  $r$  debe ser un número impar. Por lo tanto,  $r \neq 6$ .

3)  $a, c > 0$ ;  $b, d < 0$ :

Nuevamente, por el mismo motivo que en la demostración del ítem anterior, nos alcanza con mostrar que  $r \neq 6$ . Es más, observemos que  $f$  se comporta de la misma de las misma forma en los extremos de  $(0, 1)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

Así,  $r \neq 6$ .

4)  $a, b > 0$ ;  $c, d < 0$ :

El análisis de este caso puede encontrarse en el Lema 29.

5)  $a, b, c, d > 0$ :

El análisis de este caso puede encontrarse en el Lema 30.

6)  $a, b, c, d < 0$ :

El análisis que se hace en este caso es exactamente el mismo que se hace para el caso del ítem anterior.

7)  $a > 0$ ;  $b, c, d < 0$ :

El análisis de este caso puede ser encontrado en el Lema 31.

8)  $a, d > 0$ ;  $b, c < 0$ :

El análisis de este caso puede ser encontrado en el Lema 32.

Queda por lo tanto probado el Teorema 18.

□

Para la demostración de los Lemas 29, 30, 31 y 32, vamos a definir las siguientes aplicaciones en el intervalo  $(0, 1)$ :

$$T(x) := \frac{A}{B}x^{a-c}(1-x)^{b-d}(-a(1-x) + bx), \quad S(x) := c - (c+d)x,$$

$$\tilde{T}(x) := \frac{B}{A}x^{c-a}(1-x)^{d-b}(-c(1-x) + dx), \quad \tilde{S}(x) := a - (a+b)x.$$

Con el propósito de conseguir una lectura de las próximas demostraciones lo más simple posible, vamos a exhibir las derivadas de primer y segundo orden de  $T$  y  $\tilde{T}$ .

$$T' = \frac{A}{B}x^{a-c-1}(1-x)^{b-d-1} \underbrace{[(-a(1-x) + bx)((a-c)(1-x) - (b-d)x) + (a+b)x(1-x)]}_{q(x)}$$

$$T'' = \frac{A}{B}x^{a-c-1}(1-x)^{b-d-1} [q(x)((a-c-1)(1-x) - (b-d-1)x) + x(1-x)p(x)]$$

$$\tilde{T}' = \frac{B}{A}x^{c-a-1}(1-x)^{d-b-1} \underbrace{[(-c(1-x) + dx)((c-a)(1-x) - (d-b)x) + (c+d)x(1-x)]}_{\tilde{q}(x)}$$

$$\tilde{T}'' = \frac{B}{A}x^{c-a-1}(1-x)^{d-b-1} [\tilde{q}(x)((c-a-1)(1-x) - (d-b-1)x) + x(1-x)\tilde{p}(x)]$$

donde  $q(x)$ ,  $\tilde{q}(x)$ ,  $p(x)$  y  $\tilde{p}(x)$  son polinomios en  $x$  con coeficientes en  $\mathbb{R}[a, b, c, d]$ .

En la demostración de los Lemas que se enuncian a continuación se utilizará con frecuencia las observaciones y definiciones hechas en la sección 2.1.3.

Dada  $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  una función arbitraria. Diremos que  $h$  es positiva (resp. negativa) en  $0 \ll x < 1$  si existe  $\delta \in (0, 1)$  tal que  $h(x) > 0$  (resp.  $h(x) < 0$ ) para todo  $x$  en  $(0, \delta)$ . En forma análoga se definen propiedades de  $h$  en  $0 < x \ll 1$ .

**Lema 29** *Siguiendo las notaciones introducidas en la demostración del Teorema 18. Si  $a, b > 0$  y  $c, d < 0$ , entonces  $r \leq 5$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $M = 3$  y veamos que  $N \leq 4$ .

Si  $M = 3$ , tanto  $P(u)$  como  $\tilde{P}(u)$  tiene tres ceros reales positivos. Con lo cuál, por la Regla de los Signos de Descartes,  $P$  y  $\tilde{P}$  deben ir alternando los signos de sus coeficientes. Es más, cabe observar que ningún coeficiente puede ser nulo.

Por lo tanto, los coeficientes de orden 3 y 0 de  $P$ , respectivamente  $-a(a-c)(a-c-1)$  y  $b(b-d)(b-d-1)$ , deben tener distinto signo. Así, utilizando los datos de enunciado que tenemos sobre  $a, b, c$  y  $d$ , podemos asegurar que  $(a-c-1) \cdot (b-d-1) > 0$ .

- Si  $(a-c-1)$  y  $(b-d-1)$  son ambos negativos.

En estas condiciones, los coeficientes de  $\tilde{P}$  de orden 3 y 2 respectivamente, son ambos positivos, como podemos observar:

$$\underbrace{-c}_{>0} \underbrace{(c-a)}_{<0} \underbrace{(c-a-1)}_{<0} > 0, \quad \underbrace{(c-a)}_{<0} [2c \underbrace{(d-b+1)}_{>0} + d \underbrace{(c-a+1)}_{>0}] > 0.$$

Absurdo.

- Si  $(a-c-1)$  y  $(b-d-1)$  son ambos positivos.

Sean  $0 < x_1 < \dots < x_N < 1$ , los  $N$  ceros de  $g(x) = T(x) - S(x)$ . Así, por el Teorema de Rolle, para  $i \in \{1, \dots, N-1\}$ , existe  $c_i \in (x_i, x_{i+1})$  tal que  $0 = g'(c_i) = T'(c_i) - S'(c_i)$ . Con lo cual,  $T'(c_i) = -(c+d)$ .

Nuevamente por Rolle, para  $i \in \{1, \dots, N-2\}$ , existe  $d_i \in (c_i, c_{i+1})$  tal que  $T''(d_i) = 0$ .

Supongamos, por el absurdo, que  $T''$  no tiene más ceros en  $(0, 1)$  y, con este propósito, analicemos el comportamiento de  $T'$  y  $T''$  en  $0 < x \ll 1$ :

Utilizando las derivadas de primer y segundo orden de  $T$ , que se exhiben en la página 60, podemos afirmar que  $T'$  y  $T''$  son negativas en  $0 < x \ll 1$ .

Dado que  $T''$  no tiene más ceros que las  $d_i$  y es negativa en  $0 < x \ll 1$ , podemos afirmar que  $T'' < 0$  en  $(0, d_1)$ . Con lo cual, utilizando que  $T' < 0$  en  $0 < x \ll 1$ , resulta que  $T' < 0$  en  $(0, d_1)$ . Así, como  $c_1 \in (0, d_1)$ ,  $0 > T'(c_1) = -(c+d) > 0$ . Absurdo.

Entonces  $T''$  tiene por lo menos  $N-1$  ceros en  $(0, 1)$ .

Por lo tanto, dado que  $g'' = T'' - \overbrace{S''}^{=0}$ ,  $g''$  tiene por lo menos  $N-1$  ceros. Así, como

$$P\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{B}{A} x^{c-a-1} (1-x)^{d+2-b} g''(x),$$

$P\left(\frac{1-x}{x}\right)$  tiene por lo menos  $N-1$  ceros en  $(0, 1)$ . Entonces, por la Proposición 25, tenemos que el polinomio  $P(u)$ , de grado 3, tiene por lo menos  $N-1$  raíces en  $\mathbb{R}_{>0}$ . Con lo cual,  $N-1 \leq 3$  y por consiguiente  $N \leq 4$  como buscábamos.

□

**Lema 30** Siguiendo las notaciones introducidas en la demostración del Teorema 18. Si  $a, b, c, d > 0$ , entonces  $r \leq 5$ .

**Demostración.** Supongamos que  $M = 3$ , entonces, por la Regla de los Signos de Descartes, los coeficientes, tanto de  $P$  como de  $\tilde{P}$ , deben ir alternando sus signos. Con lo cual, los coeficientes de orden 3 y 0 de  $P$ , respectivamente,  $-a(a-c)(a-c-1)$  y  $b(b-d)(b-d-1)$ , deben tener signos distintos. Así,

$$(a-c)(a-c-1).(b-d)(b-d-1) > 0.$$

Teniendo en cuenta que si  $(a-c) < 0$ , entonces  $(a-c-1) < 0$  (ídem con  $(b-d)$ ), sólo nos queda por analizar los siguientes 5 casos:

- Si los signos de  $(a-c)$ ,  $(a-c-1)$ ,  $(b-d)$  y  $(b-d-1)$  son, respectivamente,  $+ - + -$ .

En estas condiciones los coeficientes de orden 3 y 2 de  $P$  son ambos positivos como podemos ver:

$$\underbrace{-a}_{<0} \underbrace{(a-c)}_{>0} \underbrace{(a-c-1)}_{<0} > 0, \quad \underbrace{(a-c)}_{>0} [2a \underbrace{(b-d+1)}_{>0} + b \underbrace{(a-c+1)}_{>0}] > 0.$$

Absurdo.

- Si los signos de  $(a-c)$ ,  $(a-c-1)$ ,  $(b-d)$  y  $(b-d-1)$  son, respectivamente,  $- - + +$ .

Por ser  $(b-d) > 0$ , resulta que  $(d-b) < 0$  y  $(d-b-1) < 0$ . Entonces,  $d(d-b)(d-b-1)$ , el término independiente de  $\tilde{P}$ , es positivo. Por lo tanto, los coeficientes de orden 1 y 2 de  $\tilde{P}$  son, respectivamente, negativo y positivo. Así,

$$\begin{aligned} c(d-b+1) + 2d(c-a+1) < 0 \quad \text{y} \quad 2c(d-b+1) + d(c-a+1) > 0 \\ \Rightarrow -c(d-b+1) - 2d(c-a+1) > 0 \quad \text{y} \quad 2c(d-b+1) + d(c-a+1) > 0. \end{aligned}$$

Entonces, si los sumamos, obtenemos:

$$0 < \underbrace{c(d-b+1)}_{<0} - \underbrace{d(c-a+1)}_{>0} < 0.$$

Absurdo.

- Si los signos de  $(a - c)$ ,  $(a - c - 1)$ ,  $(b - d)$  y  $(b - d - 1)$  son, respectivamente,  $+ + - -$ .

Esto caso se analiza de la misma forma que el anterior.

Por ser  $(a - c) > 0$ , tenemos que  $(c - a) < 0$  y  $(c - a - 1) < 0$ . Entonces, el coeficiente principal de  $\tilde{P}$ , precisamente  $-c(c - a)(c - a - 1)$ , es negativo. Con lo cual, los coeficientes de orden 1 y 2 de  $\tilde{P}$  son, respectivamente, negativo y positivo. Así,

$$\begin{aligned} c(d - b + 1) + 2d(c - a + 1) &> 0 \quad \text{y} \quad 2c(d - b + 1) + d(c - a + 1) < 0 \\ \Rightarrow c(d - b + 1) + 2d(c - a + 1) &> 0 \quad \text{y} \quad -2c(d - b + 1) - d(c - a + 1) > 0 \end{aligned}$$

Entonces, si los sumamos, obtenemos:

$$0 < -c(\underbrace{d - b + 1}_{>0}) + d(\underbrace{c - a + 1}_{<0}) < 0.$$

Absurdo.

- Si  $(a - c)$ ,  $(a - c - 1)$ ,  $(b - d)$  y  $(b - d - 1)$  son todos negativos.

Una vez más, por la Regla de los Signos de Descartes, los coeficientes de orden 3 y 0 de  $\tilde{P}$ , respectivamente  $-c(c - a)(c - a - 1)$  y  $d(d - b)(d - b - 1)$ , deben tener signos distintos. Con lo cual, podemos asegurar que  $(c - a - 1) \cdot (d - b - 1) > 0$ .

- ▷ Si  $(c - a - 1)$  y  $(d - b - 1)$  son ambos negativos.

Los coeficientes de orden 3 y 2 de  $P$  resultan negativos, como se puede observar:

$$-a(\underbrace{a - c}_{<0})(\underbrace{a - c - 1}_{<0}) < 0, \quad (\underbrace{a - c}_{<0})[2a(\underbrace{b - d + 1}_{>0}) + b(\underbrace{a - c + 1}_{>0})] < 0.$$

Absurdo.

- ▷ Si  $(c - a - 1)$  y  $(d - b - 1)$  son ambos positivos.



Sean  $0 < x_1 < \dots < x_k < 1$ , los  $k$  ceros de  $\tilde{g} = \tilde{T} - \tilde{S}$  en  $(0, 1)$ . Observar que  $k \leq N$ , donde  $N$ , recordemos, es el mínimo entre el número de ceros de  $g$  y  $\tilde{g}$ .

Así, por el Teorema de Rolle, para  $1 \leq i \leq k - 1$ , existe  $c_i \in (x_i, x_{i+1})$  tal que  $0 = \tilde{g}'(c_i) = \tilde{T}'(c_i) - \tilde{S}'(c_i)$ . Por lo tanto,  $\tilde{T}'(c_i) = -(a + b)$ .

Una vez más utilizando Rolle, podemos observar que, para  $1 \leq i \leq k - 1$ , existe  $d_i \in (c_i, c_{i+1})$  tal que  $\tilde{T}''(d_i) = 0$ .

Dado que

$$\begin{array}{ll} \tilde{T}(x) < 0 \text{ en } 0 < x \ll 1 & \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{T}(x) = 0, \\ \tilde{T}(x) > 0 \text{ en } 0 \ll x < 1 & \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \tilde{T}(x) = 0, \end{array}$$

podemos asegurar que  $\tilde{T}$  tiene por lo menos un mínimo y un máximo local. Con lo cual, se definen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \alpha &= \min\{c \in (0, 1) / c \text{ es un mínimo local de } \tilde{T}\}, \\ \beta &= \max\{c \in (0, 1) / c \text{ es un máximo local de } \tilde{T}\}. \end{aligned}$$

Supongamos por el absurdo que  $\tilde{T}''$  no tiene más ceros en  $(0, 1)$ .

Notar que  $\alpha \neq x_i$  para todo  $i$ , ya que  $\tilde{T}'(\alpha) = 0 \neq -(a + b) = \tilde{T}'(x_i)$  (ídem con  $\beta$ ).

Si  $\alpha < x_1$ , utilizando el cálculo de la segunda derivada de  $\tilde{T}$  desarrollado en la página 60, se puede observar que  $\tilde{T}''(x) < 0$  en  $0 < x \ll 1$  y, por ser  $\alpha$  un mínimo local y  $\tilde{T}''(\alpha) \neq 0$  ( $\alpha < x_1 < d_i$  para todo  $i$ ), tenemos que  $\tilde{T}''(\alpha) > 0$ . Entonces, por la continuidad de  $\tilde{T}''$ , existe  $d_0 \in (0, \alpha)$  tal que  $\tilde{T}''(d_0) = 0$ . Absurdo, ya que habíamos supuesto que  $\{d_1, \dots, d_k\}$  eran los únicos ceros de  $\tilde{T}''$  en  $(0, 1)$ .

Si  $\alpha > x_1$ , como  $\tilde{T}(x) < 0$  en  $0 < x \ll 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{T}(x) = 0$ , si  $\tilde{T}(x_1) \geq 0$ , podríamos construirnos un mínimo local más chico que  $\alpha$ , cosa que no puede ocurrir, entonces  $\tilde{T}(x_1) < 0$ .

Dado que  $\tilde{T}(x_i) = \tilde{S}(x_i)$ , los puntos  $(x_i, \tilde{T}(x_i))$  están sobre la recta determinada por  $\tilde{S}$ , una recta con pendiente negativa que contiene a  $(x_1, \tilde{T}(x_1))$ , con  $\tilde{T}(x_1) < 0$ . Por lo tanto,  $\tilde{T}(x_k) < 0$ .

Ahora, si recordamos  $\tilde{T}(x) > 0$  en  $0 \ll x < 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \tilde{T}(x) = 0$ , entonces, usando que  $\tilde{T}(x_k) < 0$ , podemos afirmar que existe un máximo local a la derecha de  $x_k$ . Así,  $x_k < \beta$ .

Como  $\beta$  es un máximo local y  $\tilde{T}''(\beta) \neq 0$ , resulta que  $\tilde{T}''(\beta) < 0$ . Con lo cual, utilizando que  $\tilde{T}''(x) > 0$  en  $0 \ll x < 1$ , existe  $d_{k+1}$  en el intervalo  $(x_k, 1)$  tal que  $\tilde{T}''(d_{k+1}) = 0$ . Absurdo.

Entonces  $\tilde{T}''$  tiene por los menos  $k - 1 \leq N - 1$  ceros en  $(0, 1)$ .

Por lo tanto, como

$$\tilde{P}\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{A}{B}x^{a-c-1}(1-x)^{b+2-d}\tilde{g}''(x) \text{ y } \tilde{T}'' = (\tilde{g} + \tilde{S})'' = \tilde{g}'',$$

podemos asegurar que  $\tilde{P}$  tiene por lo menos  $N - 1$  raíces distintas en  $(0, 1)$ . Entonces, como  $\tilde{P}(u)$  es un polinomio de grado 3 y  $u \mapsto \left(\frac{1-x}{x}\right)$  es un cambio de variable, el cual no modifica el número de ceros,  $N - 1 \leq M = 3$ . Resultando así que  $N \leq 4$  como buscábamos.

- Si  $(a - c)$ ,  $(a - c - 1)$ ,  $(b - d)$  y  $(b - d - 1)$  son todos positivos.

Dado que  $M = 3$ , por la Regla de los Signos de Descartes, los coeficientes de orden 3 y 0 de  $\tilde{P}$ , respectivamente  $-c(c - a)(c - a - 1)$  y  $d(d - b)(d - b - 1)$ , deben alternar sus signos. Entonces  $(c - a - 1) \cdot (d - b - 1) > 0$ .

Ahora,

$$(a - c) > 0 \quad \Rightarrow \quad (c - a) < 0 \quad \Rightarrow \quad (c - a - 1) < 0,$$

entonces  $(c - a - 1)$  y  $(d - b - 1)$  son ambos negativos.

La demostración se completa de la misma forma que en el ítem anterior salvo que ahora acotamos los ceros de  $g$ , y no los de  $\tilde{g}$ .

□

**Lema 31** *Siguiendo las notaciones introducidas en la demostración del Teorema 18. Si  $a > 0$ ;  $b, c, d < 0$  entonces  $r \leq 5$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $M = 3$ . Entonces, por la Regla de los Signos de Descartes, los coeficientes de orden 3 y 0 de  $P(u)$ , respectivamente  $-a(a - c)(a - c - 1)$  y  $b(b - d)(b - d - 1)$ , deben alternar sus signos. Con lo cual,  $(a - c - 1)$  y  $(b - d)(b - d - 1)$  tienen signos distintos.

Si tenemos en cuenta que no es posible que  $(b - d) < 0$  y  $(b - d - 1) > 0$ , nos quedan únicamente por analizar los siguientes 3 casos:

- Si  $(a - c - 1)$ ,  $(b - d)$  y  $(b - d - 1)$  son todos negativos.

Los coeficientes de orden 3 y 2 de  $\tilde{P}$  son ambos positivos como se puede observar:

$$-c \underbrace{(c - a)}_{<0} \underbrace{(c - a - 1)}_{<0} \quad \text{y} \quad \underbrace{(c - a)}_{<0} [2c \underbrace{(d - b + 1)}_{>0} + d \underbrace{(c - a + 1)}_{>0}],$$

Absurdo.

- Si los signos de  $(a - c - 1)$ ,  $(b - d)$  y  $(b - d - 1)$  son, respectivamente,  $- + +$ .

Dado que  $x^{-c}(1 - x)^{-d}$  no se anula en  $(0, 1)$ ,  $f(x)$  y  $h(x)$ , donde

$$h(x) = x^{-c}(1 - x)^{-d}f(x) = x^{-c}(1 - x)^{-d} - Ax^{a-c}(1 - x)^{b-d} - B,$$

tienen el mismo conjunto de ceros en  $(0, 1)$ . Así,  $h(x)$  tiene  $r$  ceros en  $(0, 1)$ .

De la misma forma que se construyó  $P(u)$ , para acotar los ceros de  $f(x)$  en  $(0, 1)$ , vamos a contruir, a partir de  $h$ , un polinomios auxiliar  $Q(u)$  de grado a lo sumo 3, con coeficientes en  $\mathbb{R}[a, b, c, d]$ , con por lo menos  $r - 3$  ceros en  $\mathbb{R}_{>0}$ .

Por el Teorema de Rolle,

$$w(x) := -c(1 - x) + dx - Ax^a(1 - x)^b((a - c)(1 - x) - (b - d)x),$$

tiene por lo menos  $r - 1$  ceros en  $(0, 1)$ , simplemente por ser el resultado de multiplicar  $h'(x)$  por  $x^{c+1}(1 - x)^{d+1}$ , el cual no se anula en  $(0, 1)$ .

Mediante algunos cálculos, se puede observar que  $\frac{1}{A}x^{-1-a}(1 - x)^{2-b}w''(x) = Q(\frac{1-x}{x})$ , donde

$$Q(u) = -a(a - c)(a - 1)u^3 + a[(a + 1)(b - d) + 2(b + 1)(a - c)]u^2 + \\ -b[(b + 1)(a - c) + 2(b - d)(a + c)]u + b(b - d)(b - 1),$$

el cual, utilizando una vez más Rolle y la observación 25, tiene por lo menos  $r - 3$  ceros en  $\mathbb{R}_{>0}$ .

Se puede observar que:

$$\begin{array}{llll} a - c - 1 < 0 & \Rightarrow & a - 1 < c < 0 & \Rightarrow & a - 1 < 0, \\ b - d - 1 > 0 & \Rightarrow & b - d > 1 > 0 & \Rightarrow & b - d > 0. \end{array}$$

Con lo cual, los coeficientes de orden 3 y 0 de  $Q$ , respectivamente

$$-a(\underbrace{a-c}_{>0})(\underbrace{a-1}_{<0}) > 0 \quad y \quad b(\underbrace{b-d}_{>0})(\underbrace{b-1}_{<0}) > 0,$$

tienen el mismo signo. Entonces, una vez más por la Regla de los Signos de Descartes,  $Q$  tiene a lo sumo dos ceros reales positivas. Resultando así que  $r - 3 \leq 2$ . Entonces  $r \leq 5$ .

- Si los signos de  $(a - c - 1)$ ,  $(b - d)$  y  $(b - d - 1)$  son, respectivamente,  $+ + -$ .

Sean  $0 < x_1 < \dots < x_k < 1$  los ceros de  $g$ , con  $k \leq N$ . Entonces, utilizando el Teorema de Rolle podemos afirmar que, para cada  $1 \leq i \leq k-1$ , existe  $c_i \in (x_i, x_{i+1})$  tal que  $0 = g'(c_i) = T'(c_i) - S'(c_i)$ , y para cada  $1 \leq j \leq k-2$ , existe  $d_j \in (c_j, c_{j+1})$  tal que  $0 = g''(d_j) = T''(d_j)$ .

Supongamos, por el absurdo, que  $T''$  no tiene más ceros en  $(0, 1)$ ,

Si observamos la derivada de  $T$ , la cual se exhibe en la página 60, podremos notar que  $T''(x) < 0$  en  $0 < x \ll 1$ . Así,  $T''(x) < 0$  en  $(0, d_1)$ , de lo contrario, por la continuidad de  $T''$ , ésta tendría otro cero distinto de los  $d_j$ . Por lo tanto, por ser  $T'(x) < 0$  en  $0 < x \ll 1$  y lo antes mencionado, tenemos que  $T'(x) < 0$  en  $(0, d_1)$ . Con lo cual, dado que  $c_1 \in (0, d_1)$ ,

$$0 > T'(c_1) = -(c + d) > 0.$$

Absurdo.

Entonces  $T''$  tiene por lo menos  $k - 1 \leq N - 1$  ceros en  $(0, 1)$ . Por lo tanto, como  $T'' = g''$  y

$$P\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{B}{A}x^{c-a-1}(1-x)^{d+2-b}g''(x),$$

podemos afirmar que  $N - 1 \leq 3$ . Y así,  $N \leq 4$ .

□

**Lema 32** Siguiendo las notaciones introducidas en la demostración del Teorema 18. Si  $a, d > 0$ ;  $b, c < 0$  entonces  $r \leq 5$ .

**Demostración.** Supongamos que  $M = 3$ , entonces los coeficientes de orden 3 y 0 de  $P(u)$ , respectivamente

$$\underbrace{-a}_{<0} \underbrace{(a-c)}_{>0} (a-c-1) \quad \text{y} \quad \underbrace{b}_{<0} \underbrace{(b-d)}_{<0} \underbrace{(b-d-1)}_{<0},$$

deben alternar sus signos, con lo cual,  $(a-c-1) < 0$ . Así, dado que  $a > 0$  y  $c < 0$ , podemos afirmar que

$$(c-a-1) = (a-c-1) - 2a + 2c < 0.$$

Entonces el coeficiente de orden 3 de  $\tilde{P}$ ,

$$-c \underbrace{(c-a)}_{<0} \underbrace{(c-a-1)}_{<0},$$

es positivo. Luego los coeficientes de orden 2 y 1, respectivamente

$$\underbrace{(c-a)}_{<0} [2c(d-b+1) + d(c-a+1)] \quad \text{y} \quad \underbrace{(b-d)}_{<0} [c(d-b+1) + 2d(c-a+1)],$$

son negativo y positivo. Así,

$$\begin{aligned} 0 &< \underbrace{2c(d-b+1) + d(c-a+1)}_{>0} - \underbrace{(c(d-b+1) + 2d(c-a+1))}_{<0} = \\ &= \underbrace{c}_{<0} \underbrace{(d-b+1)}_{>0} - \underbrace{d}_{>0} \underbrace{(c-a+1)}_{>0} < 0. \end{aligned}$$

Absurdo.

Entonces  $M \leq 2$ .

□

# Capítulo 3

## Sistemas trinomiales y polítopos de Newton

La Teoría de Polítopos es una herramienta eficiente con la que cuenta el Álgebra para acotar el número de soluciones complejas de un sistema de ecuaciones polinomiales, junto a otras como la Resultante. Ahora bien, aunque en este caso no muy utilizados, los polítopos también pueden ser una opción viable para enfrentarse a la tarea de acotar el número de soluciones reales de un sistema de ecuaciones polinomiales.

El objetivo de este capítulo es mostrar como, en el caso particular de los sistemas trinomiales, los polítopos pueden ser útiles para obtener una cota más fina que la dada en el capítulo 2, para el conjunto de soluciones no degeneradas, de acuerdo a ciertas condiciones de la suma de Minkowski de los polítopos de Newton de cada uno de los trinomios.

### 3.1 Geometría de Polítopos

Un conjunto  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^m$  se dice **convexo** si contiene a todos los segmentos con extremos en dos puntos de  $\mathcal{P}$ .

Como fue mencionado en la definición 19, dado un conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^m$ , llamaremos **cápsula convexa de  $S$**  al menor conjunto convexo que lo contiene. Usaremos la notación  $\mathbf{Conv}(S)$  para denotar la cápsula convexa de  $S$ . Como la intersección arbitraria de conjuntos convexos es un convexo, la existencia de  $\mathbf{Conv}(S)$ , queda garantizada.

Por definición un **polígono** es la cápsula convexa de un conjunto finito no vacío en  $\mathbb{R}^m$ .

En dimensiones bajas, los polígonos son figuras geométricas conocidas:

- Un polígono en  $\mathbb{R}$  es un punto o un segmento.
- Un polígono en  $\mathbb{R}^2$  es un punto, un segmento o un polígono convexo.
- Un polígono en  $\mathbb{R}^3$  es un punto, un segmento, un polígono convexo incluido en un plano o un poliedro convexo tridimensional.

**Proposición 33** Sea  $\mathcal{P}$  el polígono definido como la cápsula convexa del conjunto finito  $S := \{s_1, \dots, s_n\} \subset \mathbb{R}^m$ . Entonces,

$$\mathcal{P} := \text{Conv}(S) = \{\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}.$$

Una combinación lineal de la forma  $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n$ , donde  $\lambda_i \geq 0$  y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  se dice una **combinación convexa**.

**Demostración.** Sea  $\mathcal{C} := \{\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$ , entonces veamos que  $\mathcal{C} \subseteq \text{Conv}(S)$ .

Dado  $x \in \mathcal{C}$ , podemos suponer  $x := \lambda_1 s_{i_1} + \dots + \lambda_k s_{i_k}$ , con  $\lambda_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  y  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ . Probemos, inductivamente en  $k$ , que  $x \in \text{Conv}(S)$ .

Si  $k = 1$ , entonces  $\lambda_1 = 1$  y  $x = s_{i_1} \in S \subseteq \text{Conv}(S)$ .

En el caso general, por ser  $\lambda_i > 0$  para todo  $i$ , obtenemos que

$$1 - \lambda_1 = \sum_{i=2}^k \lambda_i > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \lambda_1 s_{i_1} + (1 - \lambda_1) \left( \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_1} s_{i_2} + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_1} s_{i_k} \right),$$

donde, por hipótesis inductiva,  $(\frac{\lambda_2}{1 - \lambda_1} s_{i_2} + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_1} s_{i_k}) \in \text{Conv}(S)$ , ya que  $\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} > 0$  y  $\sum_{i=2}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} = 1$ . Entonces  $x = \lambda_1 s_{i_1} + (1 - \lambda_1)x_1$ , con  $s_{i_1}, x_1 \in \text{Conv}(S)$  y  $\lambda_1 \in (0, 1)$ . De esta forma,  $x$  está contenido en el segmento que tiene como extremos a  $s_{i_1}$  y a  $x_1$ , concluyendo de este modo que  $x \in \text{Conv}(S)$ , y así  $\mathcal{C} \subseteq \text{Conv}(S)$ .

Es inmediato observar que  $S$  está contenido en  $\mathcal{C}$ , con lo cual, sólo nos resta mostrar que  $\mathcal{C}$  es convexo.

Dados  $x := \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n$  y  $x' := \lambda'_1 s_1 + \dots + \lambda'_n s_n$  en  $\mathcal{C}$ , veamos que el segmento que generan también está contenido en  $\mathcal{C}$ . Sea  $\alpha \in [0, 1]$ , entonces

$$\alpha x + (1 - \alpha)x' = \sum_{i=1}^n \alpha \lambda_i s_i + \sum_{i=1}^n (1 - \alpha) \lambda'_i s_i = \sum_{i=1}^n (\alpha \lambda_i + (1 - \alpha) \lambda'_i) s_i.$$

Por lo tanto,  $\alpha x + (1 - \alpha)x' = \sum_{i=1}^n \beta_i s_i \in \mathcal{C}$ , donde

$$\beta_i := (\alpha \lambda_i + \underbrace{(1 - \alpha)}_{\geq 0} \lambda'_i) \geq 0 \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^n \beta_i = \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n \lambda'_i = \alpha + 1 - \alpha = 1.$$

Así,  $\mathcal{C}$  es convexo y  $\text{Conv}(S) = \mathcal{C}$ . □

En los polítopos se distinguen unos subconjuntos especiales, sus **caras**, que son, por ejemplo para un polígono en  $\mathbb{R}^2$ , sus lados y sus vértices. En general:

**Definición 34** Dado  $\mathcal{P} = \text{Conv}(S) \subseteq \mathbb{R}^m$  un polítopo, y  $\nu$  un vector no nulo en  $\mathbb{R}^m$ . Sea  $a_{\mathcal{P}}(\nu) := \min_{x \in \mathcal{P}} \{x \cdot \nu\}$ , donde  $x \cdot \nu := \sum_{i=1}^m x_i \nu_i$ .

La cara de  $\mathcal{P}$  determinada por  $\nu$  es el conjunto

$$\mathcal{P}_{\nu} := \{x \in \mathcal{P} / x \cdot \nu = a_{\mathcal{P}}(\nu)\}.$$

El conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^m : x \cdot \nu = a_{\mathcal{P}}(\nu)\}$  se llama un **hiperplano soporte de  $\mathcal{P}$** , con **normal interior  $\nu$**  (ver figura 3).

En la definición,  $a_{\mathcal{P}}(\nu)$  se introdujo como un mínimo. Mostremos que efectivamente dicho mínimo existe. Es más, podemos asegurar que tal mínimo es alcanzado en alguno de los  $s_i \in S$ :

Sea  $s_{i_0} \in S$  tal que  $s_{i_0} \cdot \nu = \min_{1, \dots, n} s_i \cdot \nu$ , entonces,  $S$  está contenida en el semiespacio  $E_{i_0} = \{x \in \mathbb{R}^m / x \cdot \nu \geq s_{i_0} \cdot \nu\}$ , claramente un conjunto convexo.

Por lo tanto, utilizando que la intersección de convexos resulta convexa, obtenemos que  $E_{i_0} \cap \mathcal{P}$  contiene a  $S$  y es convexo, de este modo,  $E_{i_0} \cap \mathcal{P} = \mathcal{P}$ , por estar definido  $\mathcal{P}$  como el más chico con esta propiedad. Concluimos, como estabamos buscando, que  $x \cdot \nu \geq s_{i_0} \cdot \nu$  para todo  $x$  en  $\mathcal{P}$ .



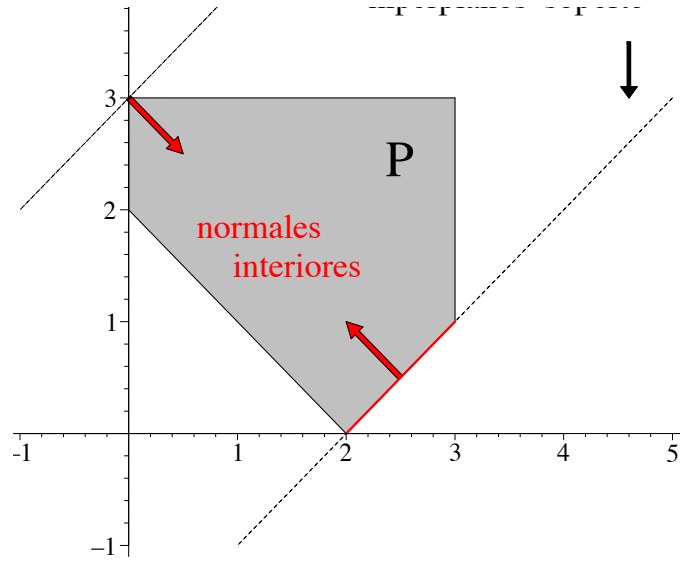


figura 3. Normales interiores e hiperplanos soporte.

Dado un polígono  $\mathcal{P}$  en  $\mathbb{R}^m$ , definiremos la **dimensión** de  $\mathcal{P}$  como la dimensión del menor espacio afín que lo contiene.

**Proposición 35** La cara  $\mathcal{P}_\nu$  de un polígono  $\mathcal{P} = \text{Conv}(S) \subseteq \mathbb{R}^m$  determinada por  $\nu \in \mathbb{R}^m - 0$  es el polígono

$$\mathcal{P}_\nu = \text{Conv}(\{s \in S / s \cdot \nu = a_{\mathcal{P}}(\nu)\}),$$

con dimensión estrictamente menor que  $m$ .

**Demostración.** Sea  $\mathcal{P}_\nu := \{x \in \mathcal{P} / x \cdot \nu = a_{\mathcal{P}}(\nu)\}$  la cara de  $\mathcal{P}$  determinada por  $\nu$ . En la página 71 se mostró que existe  $s_0 \in S$  tal que  $s_0 \cdot \nu = a_{\mathcal{P}}(\nu)$ , de esta manera tenemos asegurado que el conjunto  $\{s \in S / s \cdot \nu = a_{\mathcal{P}}(\nu)\}$  es distinto de vacío.

Sin pérdida de generalidad, si  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ , sea  $\{s \in S / s \cdot \nu = a_{\mathcal{P}}(\nu)\} = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  (para algún  $k \leq n$ ). Queremos probar que

$$\mathcal{C} := \text{Conv}(\{s_1, \dots, s_k\}) = \mathcal{P}_\nu.$$

Por la Proposición 33, un punto  $x$  pertenece a  $\mathcal{C}$  si y solo si  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i s_i$ , una combinación convexa, por lo tanto,

$$x \in \mathcal{P} \quad \text{y} \quad x \cdot \nu = \sum_{i=1}^k \lambda_i (s_i \cdot \nu) = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{\mathcal{P}}(\nu) = a_{\mathcal{P}}(\nu) \sum_{i=1}^k \lambda_i = a_{\mathcal{P}}(\nu),$$

entonces  $x$  pertenece a  $\mathcal{P}_\nu$  y  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_\nu$ .

Sea  $x$  en  $\mathcal{P}_\nu$ . Utilizando su escritura como combinación convexa de los elementos de  $S$  obtenemos:

$$a_{\mathcal{P}}(\nu) = x \cdot \nu = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{\mathcal{P}}(\nu) + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j (s_j \cdot \nu), \quad \text{con } s_j \cdot \nu > a_{\mathcal{P}}(\nu) \text{ para } j \geq k+1.$$

Definiendo  $x' := \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i s_i + (\sum_{j=k}^n \lambda_j) s_k$ , que pertenece a  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_\nu$  por ser una combinación convexa de  $\{s_1, \dots, s_k\}$ , se satisface que  $x' \cdot \nu = a_{\mathcal{P}}(\nu)$ . Así,

$$0 = a_{\mathcal{P}}(\nu) - a_{\mathcal{P}}(\nu) = x \cdot \nu - x' \cdot \nu = \sum_{j=k+1}^n \lambda_j (s_j \cdot \nu - s_k \cdot \nu) = \sum_{j=k+1}^n \lambda_j \underbrace{(s_j \cdot \nu - a_{\mathcal{P}}(\nu))}_{>0},$$

de esta manera, resulta que  $\lambda_j = 0$  para todo  $j \geq k+1$  y como consecuencia  $x$  pertenece a  $\mathcal{C}$ .

Claramente,  $\mathcal{P}_\nu$  tiene dimensión estrictamente menor que  $m$  por estar contenido en la variedad afín  $\{x \in \mathbb{R}^m / x \cdot \nu = a_{\mathcal{P}}(\nu)\}$ , que tiene dimensión  $m-1$ .

□

Podemos observar fácilmente, de la definición de cara, que un polígono en  $\mathbb{R}^m$  de dimensión menor que  $m$  puede ser una cara de sí mismo, simplemente tomando a  $\nu$  como una normal de una variedad afín de codimensión 1 que contenga a  $\mathcal{P}$ .

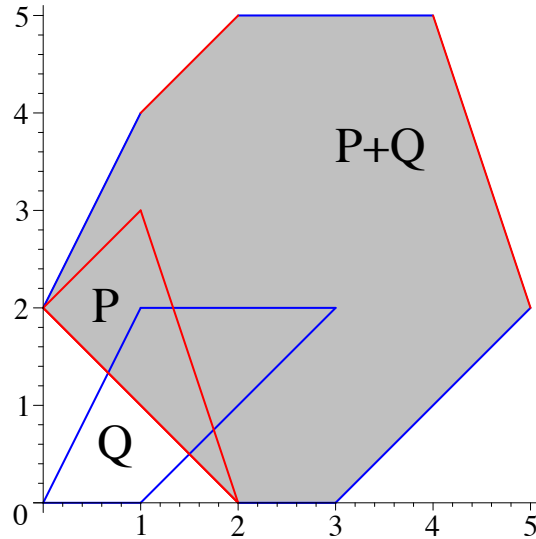
Ya que toda cara de  $\mathcal{P}$  es un polígono, llamaremos **vértices** a las caras de dimensión 0 y **facet** a las caras de dimensión  $d-1$ , donde  $d$  es la dimensión de  $\mathcal{P}$ .

**Definición 36** Sean  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r$  polítopos en  $\mathbb{R}^m$ , definimos la **suma de Minkowski** de los  $\mathcal{P}_i$ , como

$$\mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_r := \{p_1 + \dots + p_r / p_i \in \mathcal{P}_i\},$$

donde  $p_1 + \dots + p_r$  representa la suma usual de vectores en  $\mathbb{R}^m$ .

Como ejemplo, si  $\mathcal{P} := \text{Conv}\{(0, 2), (1, 3), (2, 0)\}$  y  $\mathcal{Q} := \text{Conv}\{(0, 0), (1, 2), (3, 2), (1, 0)\}$  son polítopos en  $\mathbb{R}^2$ , la suma de Minkowski  $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$  es el heptágono convexo con vértices  $(0, 2), (1, 4), (2, 5), (4, 5), (5, 2), (3, 0)$  y  $(2, 0)$ , como puede observarse en la *figura 4*.



*figura 4.* Suma de Minkowski de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ .

**Proposición 37** Sean  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r$  polítopos en  $\mathbb{R}^m$ , y sea  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_r$  su suma de Minkowski. Entonces, dado  $\nu \in \mathbb{R}^m - \{0\}$ , se verifican las siguientes igualdades:

$$a_{\mathcal{P}}(\nu) = a_{\mathcal{P}_1}(\nu) + \dots + a_{\mathcal{P}_k}(\nu) \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_{\nu} = (\mathcal{P}_1)_{\nu} + \dots + (\mathcal{P}_k)_{\nu}.$$

**Demostración.** Dado que  $\mathcal{P}$  es la suma de Minkowski de los  $\mathcal{P}_i$ , un punto  $x$  pertenece a  $\mathcal{P}$  si y solo si se puede escribir como una suma  $x_1 + \dots + x_r$ , con  $x_i$  en  $\mathcal{P}_i$ .

Por lo tanto,

$$\min_{x \in \mathcal{P}} \{x \cdot \nu\} = \min_{x_1 \in \mathcal{P}_1, \dots, x_r \in \mathcal{P}_r} \{x_1 \cdot \nu + \dots + x_r \cdot \nu\} = \min_{x_1 \in \mathcal{P}_1} \{x_1 \cdot \nu\} + \dots + \min_{x_k \in \mathcal{P}_k} \{x_k \cdot \nu\},$$

entonces, por definición, podemos asegurar que

$$a_{\mathcal{P}}(\nu) = a_{\mathcal{P}_1}(\nu) + \dots + a_{\mathcal{P}_k}(\nu),$$

terminando así con la demostración de la primer igualdad.

Ya que  $x_i \cdot \nu \geq a_{\mathcal{P}_i}(\nu)$  para todo  $x_i$  en  $\mathcal{P}_i$  con  $1 \leq i \leq k$ , dado  $x = x_1 \dots + x_k \in \mathcal{P}$ , se verifican las siguientes equivalencias:

$$x \cdot \nu = a_{\mathcal{P}}(\nu) \Leftrightarrow \sum_{i \geq 1}^k x_i \cdot \nu = \sum_{i \geq 1}^k a_{\mathcal{P}_i}(\nu) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k \underbrace{x_i \cdot \nu - a_{\mathcal{P}_i}(\nu)}_{\geq 0} = 0 \Leftrightarrow x_i \cdot \nu = a_{\mathcal{P}_i}(\nu), \forall i.$$

Concluimos de esta manera que  $\mathcal{P}_\nu = (\mathcal{P}_1)_\nu + \dots + (\mathcal{P}_k)_\nu$ . □

Los resultados que a continuación se exhiben son Corolarios inmediatos de la Proposición 37, pero muy útiles a la hora de trabajar con las caras del polígono suma, es por este motivo que los desarrollamos.

**Corolario 38** Sean  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r$  polítopos en  $\mathbb{R}^m$ , y sea  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_r$  su suma de Minkowski. Entonces toda cara  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{P}$  puede ser expresada como la suma de Minkowski,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \dots + \mathcal{C}_r,$$

donde cada  $\mathcal{C}_i$  es una cara de  $\mathcal{P}_i$ .

**Demostración.** Dada  $\mathcal{C}$  una cara de  $\mathcal{P}$ , sea  $\nu$  la normal interior que la define, es decir, aquella que verifica que:

$$\mathcal{C} = \mathcal{P}_\nu := \{x \in \mathcal{P} \mid x \cdot \nu = a_{\mathcal{P}}(\nu)\}.$$

Entonces, por la Proposición 37,  $\mathcal{P}_\nu = (\mathcal{P}_1)_\nu + \dots + (\mathcal{P}_k)_\nu$ , donde, por definición,  $(\mathcal{P}_i)_\nu$  es una cara de  $\mathcal{P}_i$ . □

**Corolario 39** Sean  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$  polítopos en  $\mathbb{R}^m$  tal que  $\mathcal{P}$ , su suma de Minkowski, tiene dimensión  $m$ . Dado  $\nu$  un vector no nulo en  $\mathbb{R}^m$ , se pueden observar los siguientes dos resultados:

1.  $\mathcal{P}_\nu = (\mathcal{P}_1)_\nu + \dots + (\mathcal{P}_k)_\nu$  es una cara de dimensión 0 de  $\mathcal{P}$  si y solo si  $(\mathcal{P}_i)_\nu$  es una cara de dimensión 0 de  $\mathcal{P}_i$  para todo  $1 \leq i \leq k$ .

2. Si para algún  $i$ ,  $(\mathcal{P}_i)_\nu$  es una cara de  $\mathcal{P}_i$  de dimensión  $m - 1$ , entonces  $\mathcal{P}_\nu = (\mathcal{P}_1)_\nu + \dots + (\mathcal{P}_k)_\nu$  es una faceta de  $\mathcal{P}$ .

**Demostración.** 1. Observemos que si un polígono  $\mathcal{Q}$  tiene un número finito de elementos, entonces consiste en un solo punto (pues si tuviese dos elementos, contendría todo el segmento que los tiene por extremos) y por lo tanto tiene dimensión 0.

Así, nos alcanza con ver que,  $\mathcal{P}_\nu = (\mathcal{P}_1)_\nu + \dots + (\mathcal{P}_k)_\nu$  es finito si y solo si  $(\mathcal{P}_i)_\nu$  es finito para todo  $i$ , lo cual es inmediato.

2. Supongamos, sin pérdida de generalidad que  $(\mathcal{P}_1)_\nu$  es una cara de  $\mathcal{P}_1$  de dimensión  $m - 1$ , entonces existen  $y_1, y_2, \dots, y_m$  en  $(\mathcal{P}_1)_\nu$ , verificando que  $y_2 - y_1, \dots, y_m - y_1$  son linealmente independientes en  $\mathbb{R}^m$ . Ahora, por ser  $(\mathcal{P}_2)_\nu, \dots, (\mathcal{P}_k)_\nu$  no vacíos, existen respectivamente  $x_2, \dots, x_k$  en  $(\mathcal{P}_2)_\nu, \dots, (\mathcal{P}_k)_\nu$ , entonces,

$$s_1 := y_1 + \sum_{i=2}^k x_i, \quad s_2 := y_2 + \sum_{i=2}^k x_i, \quad \dots, \quad s_m := y_m + \sum_{i=2}^k x_i,$$

son  $m$  puntos en  $\mathcal{P}_\nu$  tal que  $s_2 - s_1, \dots, s_k - s_1$  son vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^m$ . En consecuencia, toda variedad afín que los contenga debe tener dimensión no inferior a  $m - 1$ . Así que  $m - 1 \leq \dim(\mathcal{P}_\nu) < m$  implica que  $\mathcal{P}_\nu$  es una faceta de  $\mathcal{P}$ .

□

Dados un polígono  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^m$  y un vector no nulo  $\nu$  en  $\mathbb{R}^m$ , tenemos determinada una única cara  $\mathcal{P}_\nu$  de  $\mathcal{P}$ , ahora bien, no es cierto, que dada un cara tengamos determinado un único vector no nulo que la define, aunque le demos a éste la condición extra de estar normalizado, como puede observarse en los vértices (caras de dimensión 0) de un polígono en el plano.

Observemos que ocurre si hacemos este análisis con las caras de dimensión  $m - 1$ .

**Proposición 40** *Sea  $\mathcal{C}$  una cara de dimensión  $m - 1$  de un polígono  $\mathcal{P}$  en  $\mathbb{R}^m$ . Entonces, existe un único vector  $\nu \in \mathbb{R}^m$  de norma 1 tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{P}_\nu$ , salvo en el caso en que  $\mathcal{P}$  tenga dimensión  $m - 1$ , el cual verifica que  $\mathcal{C} = \mathcal{P}$  y existen dos vectores de norma 1 para los cuales  $\mathcal{C} = \mathcal{P}_\nu$ , uno inverso aditivo del otro.*

**Demostración.** Dado que  $\mathcal{C}$  tiene dimensión  $m - 1$ , o equivalentemente de codimensión 1, existe un vector normalizado (de norma 1)  $\nu$  en  $\mathbb{R}^m$ , tal que  $\mathcal{C}$  está contenida en el hiperplano soporte  $\{x \in \mathbb{R}^m / x \cdot \nu = a_{\mathcal{P}}(\nu)\}$ , es más, cualquier vector con esta propiedad es un múltiplo no nulo de  $\nu$ . Por lo tanto, con la condición adicional de estar normalizados, los únicos  $\mu \in \mathbb{R}^m$  tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{P}_{\mu}$  son  $\nu$  y  $-\nu$ .

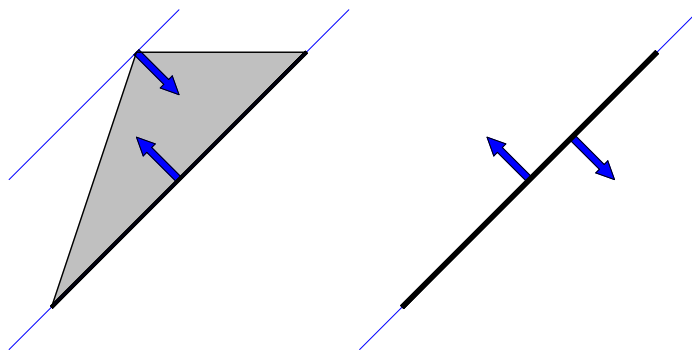
Dado que  $\mathcal{C} \subset \{x \in \mathbb{R}^m / x \cdot \nu = a_{\mathcal{P}}(\nu)\}$ , es inmediato que  $\mathcal{P}_{\nu} = \mathcal{C}$ . Ahora bien,  $-\nu$  define a  $\mathcal{C}$  si y solo si el hiperplano soporte de  $\mathcal{P}$  con normal interior  $-\nu$  coincide con el de normal interior  $\nu$ , dado que  $\mathcal{C} = \mathcal{P}_{\nu}$  y  $\mathcal{C}$  tiene codimensión 1, o equivalentemente,  $-a_{\mathcal{P}}(-\nu) = a_{\mathcal{P}}(\nu)$ .

Por lo tanto,

$$\min_{x \in \mathcal{P}} \{x \cdot \nu\} := a_{\mathcal{P}}(\nu) = -a_{\mathcal{P}}(-\nu) = -\min_{x \in \mathcal{P}} \{-x \cdot \nu\} = \max_{x \in \mathcal{P}} \{x \cdot \nu\},$$

con lo cual,  $\mathcal{P}$  está contenido en el hiperplano soporte con normal interior  $\nu$  (o bien  $-\nu$ ) y coincide con  $\mathcal{C}$ , con dimensión  $m - 1$ . Ver *figura 5*.

□



*figura 5.* Normales de polítopos de dimensiones dos y uno.

**Proposición 41** Sean  $A := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  una matriz inversible, un vector  $b \in \mathbb{R}^m$  y  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  el isomorfismo definido por  $\varphi(x) = xA^t + b$ .

Entonces, dado  $\mathcal{P} := \text{Conv}(S)$  un polítopo en  $\mathbb{R}^m$ ,  $\varphi(\mathcal{P})$  es el polítopo  $\text{Conv}(\varphi(S))$  en  $\mathbb{R}^m$  y tiene la misma cantidad de caras de cada dimensión que  $\mathcal{P}$ .

**Demostración.** Veamos primero que  $\mathcal{Q} := \varphi(\mathcal{P})$  es un polígono en  $\mathbb{R}^m$ .

Sea  $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset \mathbb{R}^m$  tal que  $\mathcal{P} := \text{Conv}(S)$ . Probemos que  $\mathcal{Q} = \text{Conv}(\varphi(S))$ . Por la Proposición 33, un punto  $x$  pertenece a  $\text{Conv}(S)$  si y solo si  $x$  es una combinación convexa de los elementos de  $S$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{Q} := \varphi(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow y = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i s_i\right), \text{ con } \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i s_i \cdot A^t\right) + b, \text{ con } \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i \cdot A^t + \sum_{i=1}^n \lambda_i b, \text{ con } \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(s_i), \text{ con } \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Leftrightarrow y \in \text{Conv}(\varphi(S)). \end{aligned}$$

Sea  $\mathcal{P}_\nu$  la cara de  $\mathcal{P}$  determinada por  $\nu$ . Por lo tanto, utilizando la Proposición 35, podemos afirmar que  $\mathcal{P}_\nu = \text{Conv}(\{s \in S / s \cdot \nu = a_{\mathcal{P}}(\nu)\})$  y, sin pérdida de generalidad, suponer que  $\mathcal{P}_\nu = \text{Conv}(\{s_1, \dots, s_k\})$ . Probemos que  $\text{Conv}(\{\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_k)\})$  es la cara de  $\mathcal{Q}$  determinada por  $\mu := (A^t)^{-1} \cdot \nu$  y que tiene la misma dimensión que  $\mathcal{P}_\nu$ :

Dado  $y \in \mathcal{Q}$ , existe  $x \in \mathcal{P}$  tal que  $y = \varphi(x)$  y, por lo tanto, para  $1 \leq i \leq k$ , se tiene:

$$\begin{aligned} y \cdot \mu &= \varphi(x) \cdot (A^t)^{-1} \cdot \nu = (x \cdot A^t + b) \cdot (A^t)^{-1} \cdot \nu = x \cdot \nu + b \cdot (A^t)^{-1} \cdot \nu \geq \\ &\geq s_i \cdot \nu + b \cdot (A^t)^{-1} \cdot \nu = (s_i \cdot A^t + b) \cdot (A^t)^{-1} \cdot \nu = \varphi(s_i) \cdot \mu. \end{aligned}$$

Se concluye por la Proposición 35. Además, por ser  $\varphi$  un isomorfismo, las dimensiones coinciden. La biyección entre caras de misma dimensión sigue del mismo hecho.  $\square$

## 3.2 Teorema de Rolle para variedades 1-dimensionales en el plano

Recordemos que  $\mathcal{C}$  es una variedad 1-dimensional en  $\mathbb{R}^2$  si es localmente  $C^\infty$ -difeomorfa a un abierto de  $\mathbb{R}$ , es decir, para cada  $x_0 \in \mathcal{C}$  existe un  $C^\infty$ -difeomorfismo  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : (a, b) \rightarrow U$ , con inversa  $C^\infty$  también, donde  $(a, b)$  es un intervalo

abierto en  $\mathbb{R}$  y  $U$  es un entorno abierto de  $x_0$  en  $\mathcal{C}$ . El difeomorfismo  $\varphi$  se llama una **parametrización local** de  $\mathcal{C}$  alrededor de  $x_0$ .

**Definición 42** Sea  $\mathcal{C}$  una variedad 1-dimensional. Se dice que  $x_0 \in \mathcal{C}$  es un **punto de tangencia vertical** de  $\mathcal{C}$  si existe una parametrización local  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  de  $\mathcal{C}$  alrededor de  $x_0$  tal que si  $\varphi(t_0) = x_0$ , entonces  $\varphi'_1(t_0) = 0$ .

Notar que por ser  $\varphi$  un difeomorfismo, si  $\varphi'_1(t_0) = 0$ , entonces  $\varphi'_2(t_0) \neq 0$ .

**Observación** Ser un punto de tangencia vertical no depende de la parametrización local:

Si  $\psi : (c, d) \rightarrow V$  es otra parametrización local alrededor de  $x_0$  tal que  $\psi(s_0) = x_0$ , sin pérdida de generalidad podemos asumir  $U = V$ . Por lo tanto, si definimos  $h := \varphi^{-1} \circ \psi : (c, d) \rightarrow (a, b)$  es un  $C^\infty$ -difeomorfismo con  $h(s_0) = t_0$ . Así,  $\psi = \varphi \circ h$  y

$$\psi'_1(t) = \varphi'_1(h(t))h'(t).$$

Luego, como  $\varphi'_1(t_0) = 0$ , se concluye que  $\psi'_1(s_0) = 0$  también.

**Definición 43** Sea  $\mathcal{C}$  una variedad 1-dimensional. Se dice que  $x_0 \in \mathcal{C}$  es un **punto de inflexión** de  $\mathcal{C}$  si existe una parametrización local,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ , de  $\mathcal{C}$  alrededor de  $x_0$  tal que si  $\varphi(t_0) = x_0$ , entonces  $\varphi''_2(t)\varphi'_1(t) - \varphi'_2(t)\varphi''_1(t)$  cambia de signo en  $t_0$ .

**Observación** Ser un punto de inflexión no depende de la parametrización local:

Si  $\psi : (c, d) \rightarrow V$  es otra parametrización local alrededor de  $x_0$  tal que  $\psi(s_0) = x_0$ , como en la observación anterior sea  $\psi = \varphi \circ h$  y

$$\psi''_1(t) = \varphi''_1(h(t))h'(t)^2 + \varphi'_1(t)h''(t) \quad , \quad \psi''_2(t) = \varphi''_2(h(t))h'(t)^2 + \varphi'_2(t)h''(t).$$

Por lo tanto

$$\psi''_2(t)\psi'_1(t) - \psi'_2(t)\psi''_1(t) = [\varphi''_2(h(t))\varphi'_1(h(t)) - \varphi'_2(h(t))\varphi''_1(h(t))]h'(t)^3.$$

Como  $h$  es continua y biyectiva, es estrictamente monótona, y  $h'(t) \geq 0$  o  $h'(t) \leq 0$  alrededor de  $s_0$ , siendo nula eventualmente solo en  $s_0$ . Así, las expresiones

$$\psi''_2(s)\psi'_1(s) - \psi'_2(s)\psi''_1(s) \quad \text{y} \quad \varphi''_2(t)\varphi'_1(t) - \varphi'_2(t)\varphi''_1(t)$$

tienen el mismo comportamiento en cuanto a cambios de signo alrededor de  $s_0$  y  $t_0$ .



Observemos que si  $\mathcal{C}$  es localmente el gráfico de una función  $C^\infty$ , es decir,  $\varphi(t) := (t, g(t))$  con  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación  $C^\infty$ , entonces la noción definida de punto de inflexión coincide con la noción usual, pues  $z_0 := \varphi(t_0)$  es un punto de inflexión de  $\mathcal{C}$  si y solo si  $g''(t)$  cambia de signo en  $t_0$ .

**Lema 44** *Sea  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$  una variedad 1-dimensional conexa y no compacta con  $V$  puntos de tangencia vertical, e  $I$  puntos de inflexión que no son puntos de tangencia vertical. Entonces, dada una recta arbitraria  $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^2$ , la cantidad de componentes conexas de  $\mathbb{L} \cap \mathcal{C}$  está acotada superiormente por  $I + V + 2$ .*

**Demostración.** Dada la recta genérica  $\mathbb{L} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / v_2x_1 - v_1x_2 = a\}$ , probemos en un primer paso que si

$$X := \{x \in \mathcal{C} / T_x(\mathcal{C}) = \{\lambda(v_1, v_2) : \lambda \in \mathbb{R}\}\}$$

la cantidad de componentes conexas de  $\mathbb{L} \cap \mathcal{C}$  es menor o igual que la cantidad de componentes conexas de  $X$  más uno.

Dado que las componentes conexas de  $\mathbb{L} \cap \mathcal{C}$  son intervalos en la recta  $\mathbb{L}$ , tiene sentido considerar componentes conexas consecutivas de  $\mathbb{L} \cap \mathcal{C}$ . Vamos a probar que dos componentes consecutivas de  $\mathbb{L} \cap \mathcal{C}$  definen al menos una componente conexa de  $X$  en forma inyectiva, lo que implica inmediatamente la afirmación anterior.

Sean  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  dos componentes conexas consecutivas de  $\mathbb{L} \cap \mathcal{C}$  y sean  $x \in \mathcal{C}_1$  e  $y \in \mathcal{C}_2$ . Definimos  $z \in X - \mathbb{L}$  de la siguiente manera:

Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$  el difeomorfismo del Teorema de clasificación de variedades conexas 1-dimensionales. Si  $x = \varphi(t_1)$  e  $y = \varphi(t_2)$  con  $t_1 < t_2$ , sea  $\eta(t) := v_2\varphi_1(t) - v_1\varphi_2(t) - a$ . La aplicación  $\eta$  se anula sobre  $t_1$  y  $t_2$  pero no en todo  $(t_1, t_2)$  (pues  $x$  e  $y$  no están en la misma componente conexa). Por el Teorema de Rolle, existe  $t_0 \in (t_1, t_2)$  tal que

$$\eta(t_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \eta'(t_0) = v_2\varphi_1'(t_0) - v_1\varphi_2'(t_0) = 0.$$

Por lo tanto  $z := \varphi(t_0)$  verifica que  $z \in \mathcal{C} - \mathbb{L}$  y  $T_z(\mathcal{C}) = \{\lambda v, \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Así,  $z \in X$ . Sea ahora  $X'$  la componente conexa de  $X$  a la cual pertenece  $z$ . Por el Teorema del valor medio, y dado que  $z \notin \mathbb{L}$ , existen  $t'_1 \in (t_1, t_0)$  y  $t'_2 \in (t_0, t_2)$  tales que

$$\eta'(t'_1) = \frac{\eta(t_0)}{t_0 - t_1} \neq 0 \quad , \quad \eta'(t'_2) = -\frac{\eta(t_0)}{t_2 - t_0} \neq 0.$$

Así, si  $z' := \varphi(t'_1)$  y  $z'' := \varphi(t'_2)$ , se tiene que  $z', z'' \in \mathcal{C} - X$ . Por lo tanto  $z = \varphi(t_0) \in \varphi(t'_1, t'_2)$  implica  $\varphi^{-1}(X') \subset (t'_1, t'_2)$ , luego  $X' \subset \varphi(t'_1, t'_2)$  que es abierto en  $\mathcal{C}$  por ser  $\varphi^{-1}$  continua.

Finalmente, como  $\varphi$  es una parametrización global de  $\mathcal{C}$ , es inmediato deducir que la componente conexa  $X'$  de  $z \in X$  queda desconectada de la componente conexa de otro punto de  $X$  construido de la misma forma a partir de otras dos componentes conexas consecutivas de  $\mathbb{L} \cap \mathcal{C}$ .

Probemos ahora que dado  $v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ , la cantidad de componentes conexas del conjunto  $X$  definido previamente está acotado por  $I + V + 1$ .

Si  $v = (0, v_2)$  con  $v_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $X$  está formado precisamente por los puntos de tangencia vertical, un conjunto con  $V$  componentes conexas.

Sea entonces  $v \neq (0, v_2)$ . Analicemos primero el caso donde  $\mathcal{C}$  no tiene puntos de tangencia vertical, es decir  $V = 0$ . Se define

$$\theta : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2) \quad , \quad t \mapsto \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}\right).$$

Es inmediato verificar que  $\theta(t)$  define el ángulo entre el eje de abscisas y la recta tangente a  $\mathcal{C}$  en  $\varphi(t)$ .

Si  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$  es el ángulo entre el eje de las abscisas y la recta generada por  $v$  (que no es una recta vertical), observemos que  $X$  coincide con el conjunto  $\varphi(\theta^{-1}(\alpha))$ .

Dado que  $\mathcal{C}$  no tiene puntos de tangencia vertical,  $\varphi_1'(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , y por lo tanto la función  $\theta$  es  $C^1$  con derivada

$$\theta'(t) = \operatorname{arctg}'\left(\frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}\right) \left(\frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}\right)' = \frac{\varphi_2''(t)\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t)\varphi_1''(t)}{\left(1 + \left(\frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}\right)^2\right)\varphi_1'(t)^2}. \quad (3.1)$$

Se desprende que  $\theta'$  cambia de signo en  $t$ , para algún  $t$  en  $\mathbb{R}$  si y solo si  $\varphi(t)$  es un punto de inflexión de  $\mathcal{C}$ . Sean  $t_1 < \dots < t_I$  las preimágenes por  $\varphi$  de los  $I$  puntos de inflexión de  $\mathcal{C}$ , y notemos  $t_0 := -\infty, t_{I+1} = +\infty$ . Entonces  $\theta$  es monótona sobre los intervalos  $(t_i, t_{i+1})$ ,  $0 \leq i \leq I$ .

Ahora, sea  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$  el ángulo entre el eje de las abscisas y la recta generada por  $v$ . Como  $\theta$  es monótona y continua sobre  $(t_i, t_{i+1})$ , los conjuntos  $\theta^{-1}(\alpha) \cap (t_i, t_{i+1})$  (o  $\theta^{-1}(\alpha) \cap [t_i, t_{i+1}]$  para  $1 \leq i \leq I - 1$ ) tienen a lo sumo una componente conexa. Así,

$$\theta^{-1}(\alpha) = \left(\theta^{-1}(\alpha) \cap (t_0, t_1)\right) \cup \bigcup_i \left(\theta^{-1}(\alpha) \cap [t_i, t_{i+1}]\right) \cup \left(\theta^{-1}(\alpha) \cap (t_I, t_{I+1})\right)$$

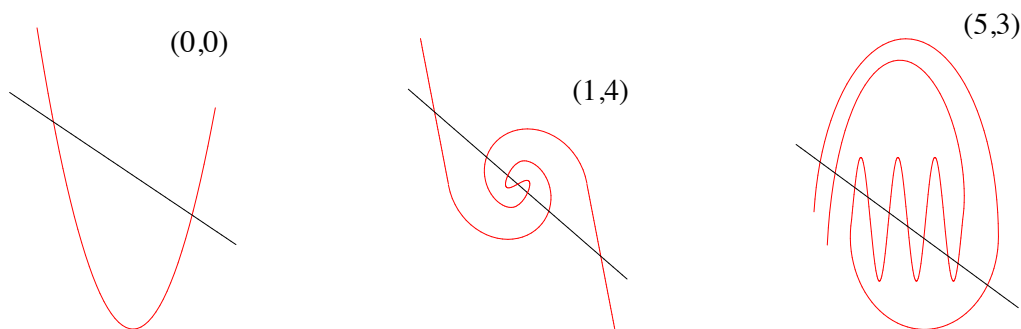
tiene a lo sumo  $I + 1$  componentes conexas. Finalmente,  $\varphi(\theta^{-1}(\alpha))$  tiene a lo sumo  $I + 1$  componentes conexas por ser  $\varphi$  continua,.

Si ahora  $\mathcal{C}$  tiene  $V$  puntos de tangencia vertical, sean  $-\infty < s_1 < \dots < s_V < +\infty$  sus preimágenes por  $\varphi$ . Entonces, las variedades conexas 1-dimensionales  $\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_V$ , definidas por:

$$\mathcal{C}_0 := \varphi(-\infty, s_1), \mathcal{C}_1 := \varphi(s_1, s_2), \dots, \mathcal{C}_{V-1} := \varphi(s_{V-1}, s_V), \mathcal{C}_V := \varphi(s_V, +\infty)$$

tienen respectivamente  $I_0, I_V$  e  $I_k$  puntos de inflexión, donde  $\sum_{k=0}^V I_k = I$ , y ningún punto de tangencia vertical, por lo tanto, por lo demostrado anteriormente, resulta que  $\mathcal{C}_k \cap \varphi(\theta^{-1}(\alpha))$  tiene a lo sumo  $I_k + 1$  componentes conexas. Dado que para  $1 \leq k \leq V$ ,  $s_k \notin \varphi(\theta^{-1}(\alpha))$  pues  $s_k$  es punto de tangencia vertical, la cantidad de componentes conexas de  $\varphi(\theta^{-1}(\alpha))$  está acotada por  $\sum_{k=0}^V (I_k + 1) = I + V + 1$ .  $\square$

En la *figura 6* se pueden observar tres variedades unidimensionales, cortadas por una recta, con  $I$  puntos de inflexión y  $V$  puntos de tangencia vertical, notados por el par ordenado  $(I, V)$ .



*figura 6.*

**Lema 45** Sea  $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación  $C^\infty$  tal que  $0 \in VR(f)$ .

Si  $z$  es un punto de inflexión en la variedad unidimensional  $\mathcal{Z} := f^{-1}\{0\}$ , entonces  $f(z) = 0$  y  $[\partial_1^2 f \cdot (\partial_2 f)^2 - 2\partial_1 \partial_2 f \cdot \partial_1 f \cdot \partial_2 f + \partial_2^2 f \cdot (\partial_1 f)^2](z) = 0$ , donde  $\partial_i f := \frac{\partial f}{\partial x_i}$ . En particular, si  $f(x, y) := 1 + c_1 x^{a_1} y^{b_1} + \dots + c_m x^{a_m} y^{b_m}$ , el anterior polinomio en derivadas parciales es, salvo un múltiplo por un monomio en los  $x^{a_i}$ , un polinomio homogéneo cúbico en los  $T_i := c_i x^{a_i} y^{b_i}$ .

**Demostración.** Sea  $z$  un punto de inflexión en  $\mathcal{Z}$  y  $\mathcal{Z}_0$  la componente conexa de  $\mathcal{Z}$  que lo contiene. Entonces, por el Teorema de Clasificación de variedades conexas 1-dimensionales, existe  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Z}_0$  un  $C^\infty$ -difeomorfismo que, por ser  $z$  un punto de inflexión, satisface que  $\varphi_2''(t)\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t)\varphi_1''(t)$  cambia de signo en  $t_0$ , donde  $\varphi(t_0) = z$ .

La composición  $f \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es idénticamente nula, por lo tanto, sus derivadas de primer y segundo orden se anulan en  $(0, 1)$  y en particular en  $t_0$ , resultando así que:

$$\partial_1 f(z) \cdot \varphi_1'(t_0) + \partial_2 f(z) \cdot \varphi_2'(t_0) = 0, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \partial_1^2 f(z) \cdot (\varphi_1'(t_0))^2 + 2\partial_1 \partial_2 f(z) \cdot \varphi_1'(t_0) \cdot \varphi_2'(t_0) + \partial_2^2 f(z) \cdot (\varphi_2'(t_0))^2 + \\ + \partial_1 f(z) \cdot \varphi_1''(t_0) + \partial_2 f(z) \cdot \varphi_2''(t_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dado que  $z$  es un punto de inflexión de  $\mathcal{Z}$ ,  $\varphi_2''(t_0)\varphi_1'(t_0) - \varphi_2'(t_0)\varphi_1''(t_0) = 0$ , dicho de otro modo, el vector  $(\varphi_2''(t_0), -\varphi_1''(t_0))$  es ortogonal a  $(\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))$  y, por (3.2),  $(\partial_1 f(z), \partial_2 f(z))$  verifica la misma propiedad. De esta forma, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\lambda \partial_1 f(z) = \varphi_2''(t_0) \quad \text{y} \quad \lambda \partial_2 f(z) = -\varphi_1''(t_0),$$

de donde fácilmente se desprende que la suma de los dos últimos términos de (3.3) es cero.

Para terminar con la demostración de la primer afirmación del Lema, por ser  $(-\partial_2 f(z), \partial_1 f(z))$  no nulo ( $z$  es un punto regular de  $f$ ) y  $(\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))$ , ortogonal a  $(\partial_1 f(z), \partial_2 f(z))$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  no nulo (ya que de lo contrario  $\varphi$  no sería un  $C^\infty$ -difeomorfismo), tal que:

$$-\alpha \partial_2 f(z) = \varphi_1'(t_0) \quad \text{y} \quad \alpha \partial_1 f(z) = \varphi_2'(t_0).$$

Entonces, simplemente reemplazando esto en (3.3) obtenemos lo que se anunciaba en el Lema.

Observemos que solo se utilizó que  $\varphi_2''(t)\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t)\varphi_1''(t)$  se anula en  $t_0$  y no que cambia de signo.

Si  $f(x, y) = 1 + \sum_{i=1}^m c_i x^{a_i} y^{b_i}$ , veamos que el polinomio en derivadas parciales del enunciado del Lema es homogéneo cúbico en los  $S_i := c_i x^{a_i} y^{b_i}$ , salvo por un monomio

en  $x$  e  $y$ . Es más, cada uno de los tres términos del polinomio es un producto de tres homogéneos lineales, multiplicado por  $x^{-2}y^{-2}$ .

Mostremos esto para el primer término:

$$\begin{aligned}\partial_1^2 f(x, y) \cdot (\partial_2 f(x, y))^2 &= \left( \sum_{i=1}^m c_i a_i (a_i - 1) x^{a_i - 2} y^{b_i} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^m c_i b_i x^{a_i} y^{b_i - 1} \right)^2 = \\ &= x^{-2} y^{-2} \left( \sum_{i=1}^m c_i a_i (a_i - 1) S_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^m c_i b_i S_i \right)^2.\end{aligned}$$

De la misma forma se muestra para los otros dos términos. □

**Observación 46** Si  $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x, y) = 1 + c_1 x^{a_1} y^{b_1} + c_2 x^{a_2} y^{b_2}$  entonces el polinomio en derivadas parciales del Lema anterior es:

$$\begin{aligned}[-a_1 b_1 \cdot (a_1 + b_1)] \cdot \mathbf{T}_1^3 &+ [-2a_1 b_1 (a_2 + b_2 + a_2 b_2) + a_2 b_1^2 (a_2 - 1) + a_1^2 b_2 (b_2 - 1)] \cdot \mathbf{T}_1^2 \mathbf{T}_2 + \\ + [-2a_2 b_2 (a_1 + b_1 + a_1 b_1) + a_1 b_2^2 (a_1 - 1) + b_1 a_2^2 (b_1 - 1)] \cdot \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2^2 &+ [-a_2 b_2 (a_2 + b_2)] \cdot \mathbf{T}_2^3,\end{aligned}$$

multiplicado por el monomio  $xy$ , donde, recordemos,  $\mathbf{T}_i = c_i x^{a_i} y^{b_i}$ .

### 3.3 Clasificación de los sistemas trinomiales según su polítopo de Newton

En esta última sección, vamos a relacionar los polítopos, desarrollados en la sección 3.1, con el Teorema de Rolle para variedades unidimensionales, para bajar la cota, dada en Capítulo anterior, de los sistemas trinomiales; según la cantidad de caras del polígono que resulte de la suma de Minkowski de los polítopos de Newton de cada  $f_i$  del sistema.

Veamos algunas propiedades de los polítopos en el plano que nos serán útiles para trabajar con los sistemas trinomiales.

**Proposición 47** Sean  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  polítopos en  $\mathbb{R}^2$  con dimensión mayor que cero, tal que su suma de Minkowski,  $\mathcal{Q} := \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ , tiene dimensión 2.

Entonces, tenemos una correspondencia biunívoca entre las facetas de  $\mathcal{Q}$  y los vectores  $\nu$  de norma 1 en el plano que definen una cara de dimensión 1 de  $\mathcal{P}_1$  o  $\mathcal{P}_2$ .

**Demostración.** Esta Proposición podría decirse que es un caso particular del Corolario 39. Dado que para toda faceta  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{Q}$  existe un único vector normalizado  $\nu$  tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{Q}_\nu$ , por ser éstas la intersección de un hiperplano con un polígono de dimensión 2, nos alcanza con ver que un vector  $\nu$  de norma 1 define una faceta de  $\mathcal{Q}$  si y solo si define una cara de dimensión 1 de  $\mathcal{P}_1$  o  $\mathcal{P}_2$ . Ahora, si  $\nu$  no define una cara de dimensión 1 de  $\mathcal{P}_1$  o  $\mathcal{P}_2$ , entonces  $(\mathcal{P}_1)_\nu$  y  $(\mathcal{P}_2)_\nu$  son caras de dimensión 0, por lo tanto, por el Corolario 39 1.,  $\mathcal{Q}_\nu$  es un punto y no una faceta. Y si  $(\mathcal{P}_1)_\nu$  o  $(\mathcal{P}_2)_\nu$  es un polígono de dimensión 1, por el Corolario 39 2.,  $\mathcal{Q}_\nu$  es una faceta, para terminar con la demostración de la Proposición. □

Para la demostración del siguiente Lema no es necesario que 0 sea un valor regular de  $f$ . Esa propiedad adicional es pedida únicamente para que  $\mathcal{Z}$  sea una variedad.

**Proposición 48** *Sea  $f : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  el siguiente trinomio:*

$$f(x_1, x_2) = c_1 x_1^{a_1} x_2^{b_1} + c_2 x_1^{a_2} x_2^{b_2} + c_3 x_1^{a_3} x_2^{b_3},$$

*tal que el cero es un valor regular con preimagen no vacía. Entonces, si  $\text{Newt}(f)$  es un triángulo, la variedad  $\mathcal{Z} := f^{-1}(0)$  tiene una componente conexa, que resulta no compacta.*

**Demostración.** Dado que  $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ , los coeficientes  $c_i$  no pueden ser todos del mismo signo. Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el signo de  $c_1$  es distinto del de los otros dos.

Dado que  $\frac{1}{c_1} x_1^{-a_1} x_2^{-b_2}$  no se anula en el cuadrante positivo,

$$\tilde{f}(x_1, x_2) := \frac{1}{c_1} x_1^{-a_1} x_2^{-b_2} f(x_1, x_2) = 1 + \frac{c_2}{c_1} x_1^{a_2 - a_1} x_2^{b_2 - b_1} + \frac{c_3}{c_1} x_1^{a_3 - a_1} x_2^{b_3 - b_1}$$

tiene el mismo conjunto de ceros de  $f$ . Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $f$  es de la forma:

$$f(x_1, x_2) = 1 - c_1 x_1^a x_2^b - c_2 x_1^c x_2^d,$$

donde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ . Es más, dado que  $\text{Newt}(f)$  es un triángulo,  $(a, b)$  y  $(c, d)$  resultan linealmente independientes. Así, sea  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matriz inversible que verifica:

$$(a, b).A^t = (1, 0) \quad \text{y} \quad (c, d).A^t = (0, 1).$$

Por lo tanto, el  $C^\infty$ -difeomorfismo  $\phi_A : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^2$  definido en la Proposición 22 por:

$$\phi_A(x) = x^A, \quad \text{donde } x^A = (x^{e_1 \cdot A^t}, x^{e_2 \cdot A^t}),$$

verifica que  $f \circ h(x_1, x_2) = 1 - c_1x_1 - c_2x_2$ .

Con lo cual, dado que  $(f \circ h)^{-1}(0) = h^{-1}(\mathcal{Z})$ , utilizando la Proposición 8, podemos afirmar que  $\mathcal{Z}$  tiene igual número de componentes conexas compactas y no compactas que el segmento de recta

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{>0}^2 / 1 - c_1x_1 - c_2x_2 = 0\}.$$

El cual, es inmediato observar, es un conexo no compacto. □

**Teorema 49** Sean  $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x^a / a \in \mathbb{R}^2]$ , trinomios en el plano. Entonces, el número máximo de soluciones no degeneradas del sistema  $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$  en el primer cuadrante ( $\mathbb{R}_{>0}^2$ ), es:

- 0 si  $\text{Newt}(f_1) + \text{Newt}(f_2)$  es un segmento,
- 2 si  $\text{Newt}(f_1) + \text{Newt}(f_2)$  es un triángulo,
- 4 si  $\text{Newt}(f_1) + \text{Newt}(f_2)$  es un cuadrilátero o pentágono.

**Demostración.** Notemos en forma genérica  $f_1(x) = c_1x^{(a_1, b_1)} + c_2x^{(a_2, b_2)} + c_3x^{(a_3, b_3)}$  y  $f_2(x) = c_4x^{(a_4, b_4)} + c_5x^{(a_5, b_5)} + c_6x^{(a_6, b_6)}$ , donde  $x^{(a_i, b_i)} := x_1^{a_i}x_2^{b_i}$ ,  $c_i \in \mathbb{R} - 0$  y los pares de exponentes de cada trinomio distintos. Podemos suponer los coeficientes de cada  $f_i$  no todos del mismo signo, ya que de lo contrario el sistema no tendría ceros en el primer cuadrante.

Dada  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  una matriz inversible. Sean, la transformación lineal  $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\varphi_A(x) := x \cdot A^t$ , y el  $C^\infty$ -difeomorfismo  $\phi_A : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^2$  dado por:

$$\phi_A(x_1, x_2) := (x_1^{a_{11}}x_2^{a_{21}}, x_1^{a_{12}}x_2^{a_{22}}),$$

para el cual, la demostración de que es un  $C^\infty$ -difeomorfismo puede ser encontrada en el Capítulo 2, Proposición 22.

Observemos que

$$\phi_A(x) = (x^{\varphi_A(1,0)}, x^{\varphi_A(0,1)}), \text{ por lo tanto, } \phi_A(x)^{(a,b)} = x^{\varphi_A(a,0)} x^{\varphi_A(0,b)} = x^{\varphi_A(a,b)}.$$

Así, dados vectores  $b(1)$  y  $b(2)$  en  $\mathbb{R}^2$ , los trinomios  $\tilde{f}_1(x) := x^{-b(1)} f_1 \circ \phi_A(x)$  y  $\tilde{f}_2(x) := x^{-b(2)} f_2 \circ \phi_A(x)$  son de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(x) &= c_1 x^{\varphi_A(a_1, b_1) - b(1)} + c_2 x^{\varphi_A(a_2, b_2) - b(1)} + c_3 x^{\varphi_A(a_3, b_3) - b(1)} \quad \text{y} \\ \tilde{f}_2(x) &= c_4 x^{\varphi_A(a_4, b_4) - b(2)} + c_5 x^{\varphi_A(a_5, b_5) - b(2)} + c_6 x^{\varphi_A(a_6, b_6) - b(2)}. \end{aligned}$$

Es más, ya que  $\phi_A$  es un  $C^\infty$ -difeomorfismo y  $x \in \mathbb{R}_{>0}^2$ , los sistemas  $f_1(x) = f_2(x) = 0$  y  $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) = 0$  tienen igual número de soluciones no degeneradas en el cuadrante positivo (ver Proposición 7).

Veamos que los polítopos suma de Minkowski,  $Newt(f_1) + Newt(f_2)$  y  $Newt(\tilde{f}_1) + Newt(\tilde{f}_2)$  tienen la misma cantidad de caras de dimensión 1 (son polígonos con la misma cantidad de lados).

Si  $S_1 := \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)\}$  y  $S_2 := \{(a_4, b_4), (a_5, b_5), (a_6, b_6)\}$ , entonces, utilizando la Proposición 41, se puede observar, para  $i = 1, 2$ , que

$$Newt(\tilde{f}_i) := Conv(\varphi_A(S_i) - b(i)) = \varphi_A(Conv(S_i)) - b(i) = \varphi_A(Newt(f_i)) - b(i).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Newt(\tilde{f}_1) + Newt(\tilde{f}_2) &= \varphi_A(Newt(f_1)) - b(1) + \varphi_A(Newt(f_2)) - b(2) = \\ &= \varphi_A(Newt(f_1) + Newt(f_2)) - (b(1) + b(2)), \end{aligned}$$

usando en la segunda igualdad la linealidad de  $\varphi_A$ .

Con lo cual, pasando una vez más por la Proposición 41, los polítopos  $Newt(\tilde{f}_1) + Newt(\tilde{f}_2)$  y  $Newt(f_1) + Newt(f_2)$  tienen la misma cantidad de caras de dimensión 1.

Esto nos va a permitir, utilizando una  $\varphi_A$  apropiada, reducir nuestro sistema a otro conveniente en algún sentido.

En la demostración diremos que dos sistemas son equivalentes si tienen el mismo número de soluciones no degeneradas en  $\mathbb{R}_{>0}^2$  y los polítopo suma de Minkowski tienen la igual cantidad de facetas.

Durante la demostración llamaremos normal de un polítopo  $\mathcal{P}$ , a todo vector normalizado  $\nu \in \mathbb{R}^2$  que define una cara de dimensión 1.



Sea  $\mathcal{P}_i$  el polígono de Newton de  $f_i$ . Así, dado que es la cápsula convexa de un conjunto de tres puntos distintos, éste puede ser un segmento, en caso de que los tres puntos estén alineados, o un triángulo si no lo están. Por lo tanto, puede tener dos normales, una la inversa de la otra, o tres normales, una por cada una de las tres caras del triángulo.

1. Si  $\mathcal{P} = \text{Newt}(f_1) + \text{Newt}(f_2)$  es un segmento:

Por lo observado en la primera parte de la demostración, elegiremos la matriz inversible  $A$  y los vectores  $b(1)$  y  $b(2)$  apropiados.

Sean  $\nu$  y  $-\nu$  las únicas dos normales de  $\mathcal{P}$ , entonces, utilizando la Proposición 39 podemos concluir que, al igual que  $\mathcal{P}$ , las normales de  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  son  $\nu$  y  $-\nu$ .

Por lo tanto, los vectores no nulos  $(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$ ,  $(a_3 - a_1, b_3 - b_1)$ ,  $(a_5 - a_4, b_5 - b_4)$  y  $(a_6 - a_4, b_6 - b_4)$  son perpendiculares a  $\nu$ . Así, podemos suponer a los tres últimos un múltiplo no nulo del primer, con escalares  $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$  respectivamente.

Sea  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matriz de rotación tal que  $\varphi_A(a_2 - a_1, b_2 - b_1) = (0, 1)$ . Así, si  $b(1) := \varphi_A(a_1, b_1)$  y  $b(2) := \varphi_A(a_4, b_4)$ , el sistema  $\tilde{F} : \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) = 0$  resulta

$$\tilde{f}_1(x) = 1 + \frac{c_2}{c_1}x_1 + \frac{c_3}{c_1}x_1^a \quad \text{y} \quad \tilde{f}_2(x) = 1 + \frac{c_5}{c_4}x_1^b + \frac{c_6}{c_4}x_1^c$$

sin ceros no degenerados, ya que  $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_2} \equiv 0$ . Con lo cual, por ser  $F$  y  $\tilde{F}$  sistemas equivalentes,  $F$  no tiene soluciones no degeneradas en el primer cuadrante.

2. Si  $\mathcal{P} := \text{Newt}(f_1) + \text{Newt}(f_2)$  es un triángulo:

Por la Proposición 40, sean  $\nu(1)$ ,  $\nu(2)$  y  $\nu(3)$  las tres normales de  $\mathcal{P}$ , donde ninguna es la inversa aditiva de otra. Por lo tanto, no solo  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  no son segmentos, sino que son triángulos con las mismas normales  $\nu(1)$ ,  $\nu(2)$ ,  $\nu(3)$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\nu(1)$  es normal a  $\eta(1) := (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$  y a  $(a_5 - a_4, b_5 - b_4)$ , y  $\nu(2)$  normal a  $\eta(2) := (a_3 - a_1, b_3 - b_1)$  y a  $(a_6 - a_4, b_6 - b_4)$ . Así, existen  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que

$$(a_5 - a_4, b_5 - b_4) = a \eta(1) \quad \text{y} \quad (a_6 - a_4, b_6 - b_4) = b \eta(2).$$

Es más, por descarte podemos afirmar que

$$(a_3 - a_2, b_3 - b_2) = \eta(2) - \eta(1) \quad \text{y} \quad (a_6 - a_5, b_6 - b_5) = b\eta(2) - a\eta(1),$$

son perpendiculares a  $\nu(3)$ , y como consecuencia linealmente dependientes. Por lo tanto, dado que  $\eta(1)$  y  $\eta(2)$  son linealmente independientes, concluimos que  $a = b$ .

Sea  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matriz inversible tal que  $\varphi_A(\eta(1)) = (1, 0)$  y  $\varphi_A(\eta(2)) = (0, 1)$ ; y sean  $b(1) := \varphi_A(a_1, b_1)$  y  $b(2) := \varphi_A(a_4, b_4)$ . Así, el sistema  $\tilde{F} : \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) = 0$ , equivalente a  $F$ , es de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(x) &:= \frac{1}{c_1} x^{-b(1)} \cdot f_1 \circ \phi_A(x) = 1 + \frac{c_2}{c_1} x_1 + \frac{c_3}{c_1} x_2, \\ \tilde{f}_2(x) &:= \frac{1}{c_4} x^{-b(2)} \cdot f_2 \circ \phi_A(x) = 1 + \frac{c_5}{c_4} x_1^a + \frac{c_6}{c_4} x_2^a. \end{aligned}$$

Si  $a = 1$ , el conjunto de soluciones de  $\tilde{F}$  es la intersección de dos rectas, con lo cual,  $\tilde{F}$  tiene a lo sumo un cero no degenerado. Así, podemos considerar que  $a \neq 1$ .

Supongamos que  $\mathcal{Z} := \tilde{f}_2^{-1}(0)$  es no vacío, y veamos que es una variedad. Por la Proposición 10, nos alcanza con mostrar que 0 es un valor regular de  $\tilde{f}_2 : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , resultando inmediato ya que las derivadas parciales, como se puede observar, son nunca nulas en el primer cuadrante:

$$\frac{\partial \tilde{f}_2(x)}{\partial x_1} = \frac{c_5}{c_4} a x_1^{a-1} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tilde{f}_2(x)}{\partial x_2} = \frac{c_6}{c_4} b x_2^{b-1} = 0.$$

Es más, por la Proposición 48,  $\mathcal{Z}$  es una variedad unidimensional conexa no compacta.

Dado que el conjunto de ceros de  $\tilde{f}_1$  es una recta, si logramos mostrar que  $\mathcal{Z}$  no tiene ni puntos de tangencia vertical, ni puntos de inflexión, utilizando la Proposición 44, podemos mostrar que el conjunto de componentes conexas de la intersección entre la recta  $\mathbb{L} : 1 + \frac{c_2}{c_1} x_1 + \frac{c_3}{c_1} x_2 = 0$  y la variedad  $\mathcal{Z}$  es menor o igual que 2, y en consecuencia  $\tilde{F}$  tiene a lo sumo 2 soluciones no degeneradas (recordemos que toda solución no degenerada es en particular aislada).

Sea  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Z}$  el  $C^\infty$ -difeomorfismo del Teorema de Clasificación de variedades conexas 1-dimensionales. La aplicación  $\tilde{f}_2 \circ \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es idénticamente nula, resultando también así su derivada, por lo tanto,

$$\underbrace{a \frac{c_5}{c_4} \psi_1(t)^{a-1} \cdot \psi_1'(t)}_{\neq 0} + \underbrace{a \frac{c_6}{c_4} \psi_2(t)^{a-1} \cdot \psi_2'(t)}_{\neq 0} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Así, por ser  $\psi$  un  $C^\infty$ -difeomorfismo,  $\psi'(t) \neq 0$ , con lo cual,  $\psi_1'(t) \neq 0$  para todo  $t$  y, por definición,  $\mathcal{Z}$  no tiene puntos de tangencia vertical.

Utilizando la Proposición 45, si  $x$  es un punto de inflexión de  $\mathcal{Z}$ , el polinomio homogéneo cúbico desarrollado en la observación 46 se anula en  $T_1 = \frac{c_5}{c_4} x_1^a$  y  $T_2 := \frac{c_6}{c_1} x_2^a$ . Así, si reemplazamos los coeficientes de  $\tilde{f}_2$ , obtenemos las siguientes ecuaciones

$$1 + T_1 + T_2 = 0, \text{ por estar } x \text{ en } \mathcal{Z}, \quad \text{y} \quad \overbrace{a^3 T_1 T_2 (1 - a)}^{\neq 0} (T_1 + T_2) = 0,$$

que no pueden ser verificadas al mismo tiempo, por lo tanto,  $\mathcal{Z}$  no tiene puntos de inflexión.

Concluimos, de este modo, que si  $\mathcal{P}$  es un triángulo, el sistema trinomial tiene a lo sumo dos soluciones no degeneradas. Veamos con el siguiente ejemplo que la cota es alcanzada.

El sistema trinomial

$$b - x_1 - x_2 = R^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad \text{con } R > 0 \text{ y } \sqrt{2} \cdot R > b > R,$$

tiene como suma de Minkowski de los polítopos de Newton de cada trinomio al triángulo con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$  y  $(0, 3)$  y soluciones no degeneradas

$$\left( \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 - b^2}, \frac{b}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 - b^2} \right) \quad \text{y} \quad \left( \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 - b^2}, \frac{b}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 - b^2} \right).$$

En los dos casos restantes debemos mostrar que el número máximo de soluciones en el primer cuadrante es cuatro. Por lo tanto, verifiquemos, que si alguno de los trinomios tiene como polítopos de Newton un segmento, entonces el sistema tiene otro equivalente con a lo sumo cuatro soluciones no degeneradas.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $Newt(f_1)$  es un segmento y los pares  $(a_1, b_1)$  y  $(a_2, b_2)$  sus extremos. Sea  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matriz de rotación que verifica que

$\varphi_A(a_2 - a_1, b_2 - b_1) = (1, 0)$ . Así, si  $b(1) := \varphi_A(a_1, b_1)$  y  $b(2) := (0, 0)$ , el sistema  $\tilde{F} : \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) = 0$  equivalente a  $F$ , es de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1(x) &:= \frac{1}{c_1} x^{-b(1)} \cdot f_1 \circ \phi_A(x) = 1 + \frac{c_2}{c_1} x_1 + \frac{c_3}{c_1} x_1^a, \text{ donde } 0 < a < 1 \\ \tilde{f}_2(x) &:= x^{-b(2)} \cdot f_2 \circ \phi_A(x) = c_4 x^{(\tilde{a}_4, \tilde{b}_4)} + c_5 x^{(\tilde{a}_5, \tilde{b}_5)} + c_6 x^{(\tilde{a}_6, \tilde{b}_6)}.\end{aligned}$$

Por el Corolario 21, el trinomio  $\tilde{f}_1(x_1)$ , pensado en una sola variable, tiene a lo sumo dos ceros, que reemplazados por separado en  $\tilde{f}_2$  dan como resultado o el polinomio nulo, en cuyo caso  $\tilde{F}$  no tiene soluciones no degeneradas, o un  $m$ -nomio en  $x_2$  (con  $1 \leq m \leq 3$ ), que nuevamente por el Corolario 21 tiene a lo sumo dos ceros. Por lo tanto,  $\tilde{F}$  tiene a lo sumo cuatro soluciones no degeneradas.

En adelante vamos a suponer a los  $f_i$  con polítopo de Newton un triángulo.

3. Si  $\mathcal{P} := \text{Newt}(f_1) + \text{Newt}(f_2)$  es un cuadrilátero.

Sean  $\nu(1)$ ,  $\nu(2)$  y  $\nu(3)$  las tres normales de  $\mathcal{P}_1$ . Por la Proposición 47 y por ser  $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$  un cuadrilátero, podemos afirmar, sin pérdida de generalidad, que las normales de  $\mathcal{P}_2$  son  $\nu(1)$ ,  $\nu(2)$  y  $\nu(4)$  con  $\nu(i) \neq \nu(j)$  si  $i \neq j$ .

Supongamos que los lados de  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  con normal  $\nu(1)$  tienen como extremos respectivamente a  $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$  y  $\{(a_4, b_4), (a_5, b_5)\}$ , con  $(a_1, b_1)$  y  $(a_4, b_4)$  extremos también de los lados de normal  $\nu(2)$ . Así, existen reales positivos  $a$  y  $b$  tal que

$$(a_5 - a_4, b_5 - b_4) = a(a_2 - a_1, b_2 - b_1) \quad \text{y} \quad (a_6 - a_4, b_6 - b_4) = b(a_3 - a_1, b_3 - b_1),$$

con  $a$  distinto a  $b$ , por ser  $\nu(3) \neq \nu(4)$ .

Sean  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matriz inversible que verifica que  $\varphi_A(a_2 - a_1, b_2 - b_1) = (1, 0)$  y  $\varphi_A(a_3 - a_1, b_3 - b_1) = (0, 1)$ . Si  $b(1) := \varphi_A(a_1, b_1)$  y  $b(2) := \varphi_A(a_4, b_5)$ , el sistema  $\tilde{F} : \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) = 0$  es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1(x) &:= \frac{1}{c_1} x^{-b(1)} \cdot f_1 \circ \phi_A(x) = 1 + \frac{c_2}{c_1} x_1 + \frac{c_3}{c_1} x_2, \\ \tilde{f}_2(x) &:= \frac{1}{c_4} x^{-b(2)} \cdot f_2 \circ \phi_A(x) = 1 + \frac{c_5}{c_4} x_1^a + \frac{c_6}{c_4} x_2^b.\end{aligned}$$

De la misma forma que para el caso donde  $\text{Newt}(f_1) + \text{Newt}(f_2)$  es un triángulo, si  $\mathcal{Z} := \tilde{f}_2^{-1}(0)$  es no vacío, resulta una variedad unidimensional conexa no compacta.

Por lo tanto, utilizando la Proposición 44, nos alcanza con mostrar que  $\mathcal{Z}$  no tiene puntos de tangencia vertical y tiene a lo sumo un punto de inflexión.

Las derivadas parciales de  $\tilde{f}_2$  no se anulan en  $\mathbb{R}_{>0}^2$ , por lo tanto, al igual que en el caso donde  $Newt(f_1) + Newt(f_2)$  es un triángulo,  $\mathcal{Z}$  no tiene puntos de tangencia vertical.

Si  $x \in \mathcal{Z}$  un punto inflexión, por la Proposición 45, el polinomio homogéneo cúbico de la observación 46 se anula en  $T_1 := \frac{c_5}{c_4}x_1^a$  y  $T_2 := \frac{c_6}{c_4}x_2^b$ . Así, si reemplazamos con los datos del problema, obtenemos que  $(T_1, T_2)$  es la única solución del

$$\begin{aligned} & \overbrace{abT_1T_2}^{\neq 0}(a(b-1)T_1 + b(a-1)T_2) = 0, & 1 + T_1 + T_2 &= 0, \\ \Leftrightarrow & (a(b-1)T_1 + b(a-1)(-1 - T_1)) = 0, & 1 + T_1 + T_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow & (a-b)T_1 + b(a-1) = 0 & \text{y} & (a-b)T_2 - a(b-1) = 0. \end{aligned}$$

un sistema en  $T_1$  y  $T_2$ , que tiene como conjunto de soluciones a la intersección entre dos rectas distintas en el plano. Por lo tanto,  $T_1 = \alpha$  y  $T_2 = \beta$ , para algunos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Con lo cual, si  $(x_1, x_2)$  es un punto de inflexión, entonces es solución del sistema:

$$\frac{c_5}{c_4}x_1^a - \alpha = \frac{c_6}{c_4}x_2^b - \beta = 0.$$

Así, utilizando el Corolario 21, se concluye que a lo sumo existe un punto de inflexión. Por lo tanto, por la Proposición 44, el sistema  $\tilde{F}$ , y en consecuencia  $F$ , tiene a lo sumo 3 soluciones.

Así, uno puede concluir que un sistema trinomial,  $F : f_1(x) = f_2(x) = 0$ , con cuatro soluciones no degeneradas tal que  $Newt(f_1) + Newt(f_2)$  es un cuadrilátero, verifica que uno de sus trinomios tiene polítopo de Newton un segmento.

Un sistema donde se verifica la igualdad puede ser  $F : f_1(x) = f_2(x) = 0$ , donde

$$f_1(x_1, x_2) = (x_1 - \alpha(1))(x_1 - \alpha(2)), \quad f_2(x_1, x_2) = (x_2 - \beta(1))(x_2 - \beta(2)),$$

con  $\alpha(i), \beta(j) \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\alpha(1) \neq \alpha(2)$  y  $\beta(1) \neq \beta(2)$ . El cual tiene como conjunto de soluciones a  $\{(\alpha(i), \beta(j)) / 1 \leq i, j \leq 2\}$  todas no degeneradas, y el polítopo suma de Minkowski es el cuadrado con vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$  y  $(0, 2)$ .

4. Si  $Newt(f_1) + Newt(f_2)$  es un pentágono.

Sean  $\nu(1), \nu(2)$  y  $\nu(3)$  las tres normales de  $\mathcal{P}_1$ . Por la Proposición 47 y por ser  $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$  es un pentágono, vamos a suponer que las normales de  $\mathcal{P}_2$  son  $\nu(1), \nu(4)$  y  $\nu(5)$  con  $\nu(i) \neq \nu(j)$  si  $i \neq j$ .

Podemos asumir que los lados de  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  con normal  $\nu(1)$  tienen como extremos respectivamente a  $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$  y  $\{(a_4, b_4), (a_5, b_5)\}$ . Por lo tanto, si  $\eta(1) := (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$ , el vector  $(a_5 - a_4, b_5 - b_4) = a\eta(1)$  que, sin pérdida de generalidad, vamos a suponer  $a > 0$ .

Para que sea más comprensible, vamos a reducir el sistema en dos etapas.

Sea  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matriz de rotación tal que  $\varphi_A(\eta(1)) = (1, 0)$ . Entonces, si  $b(1) := \varphi_A(a_1, b_1)$  y  $b(2) := \varphi_A(a_4, b_4)$ , el sistema  $\tilde{F} : \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) = 0$  es de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1(x) &:= \frac{1}{c_1} x^{-b(1)} \cdot f_1 \circ \phi_A(x) = 1 + \frac{c_2}{c_1} x_1 + \frac{c_3}{c_1} x^{(\tilde{a}_3, \tilde{b}_3)}, \\ \tilde{f}_2(x) &:= \frac{1}{c_4} x^{-b(2)} \cdot f_2 \circ \phi_A(x) = 1 + \frac{c_5}{c_4} x_1^a + \frac{c_6}{c_4} x^{(\tilde{a}_6, \tilde{b}_6)},\end{aligned}$$

donde  $(\tilde{a}_3, \tilde{b}_3) = \varphi_A(a_3 - a_1, b_3 - b_1)$  y  $(\tilde{a}_6, \tilde{b}_6) = \varphi_A(a_6 - a_4, b_6 - b_4)$ .

Veamos que  $\tilde{b}_3$  y  $\tilde{b}_6$  son no nulos con el mismo signo. Es inmediato ver que son no nulos, ya que  $Newt(\tilde{f}_1)$  y  $Newt(\tilde{f}_2)$  son triángulos.

Como  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  comparten la normal  $\nu(1)$  y  $\varphi_A$  es una rotación, entonces  $\varphi_A(\nu(1))$  es normal tanto para  $Newt(\tilde{f}_1)$  como  $Newt(\tilde{f}_2)$ . Así, es inmediato observar, dado que  $\varphi_A(\eta(1)) = (1, 0)$ , que  $\varphi_A(\nu(1)) = (0, \pm 1)$ . Por lo tanto,

$$\pm \tilde{b}_3 = (\tilde{a}_3, \tilde{b}_3) \cdot (0, \pm 1) > 0 \quad \text{y} \quad \pm \tilde{b}_6 = (\tilde{a}_6, \tilde{b}_6) \cdot (0, \pm 1) > 0,$$

resultando que  $\tilde{b}_3$  y  $\tilde{b}_6$  tienen el mismo signo.

Supongamos que el ángulo entre los vectores  $(1, 0)$  y  $(\tilde{a}_3, \tilde{b}_3)$  sea mayor que el ángulo entre  $(1, 0)$  y  $(\tilde{a}_6, \tilde{b}_6)$ . Entonces,

$$(\tilde{a}_6, \tilde{b}_6) = c(1, 0) + d(\tilde{a}_3, \tilde{b}_3),$$

con  $c, d \in \mathbb{R}_{>0}$

Con lo cual, dada  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $\varphi_{\tilde{A}}(1, 0) = (1, 0)$  y  $\varphi_{\tilde{A}}(\tilde{a}_3, \tilde{b}_3) = (0, 1)$ , obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1 \circ \phi_{\tilde{A}}(x_1, x_2) &= 1 + \frac{c_2}{c_1}x_1 + \frac{c_3}{c_1}x_2, \\ \tilde{f}_2 \circ \phi_{\tilde{A}}(x_1, x_2) &= 1 + \frac{c_5}{c_4}x_1^a + \frac{c_6}{c_4}x_1^c x_2^d,\end{aligned}$$

donde  $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Para el caso donde el ángulo entre los vectores  $(1, 0)$  y  $(\tilde{a}_3, \tilde{b}_3)$  sea menor que el ángulo entre  $(1, 0)$  y  $(\tilde{a}_6, \tilde{b}_6)$ , simplemente elegimos  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $\varphi_{\tilde{A}}(a, 0) = (1, 0)$  y  $\varphi_{\tilde{A}}(\tilde{a}_6, \tilde{b}_6) = (\tilde{a}_3, \tilde{b}_3)$ .

Mediante un abuso de notación, llamemos  $\tilde{f}_i$  a  $\tilde{f}_i \circ \phi_{\tilde{A}}$ .

Al igual que en los casos anteriores, si  $\mathcal{Z} := \tilde{f}_2^{-1}(0)$  es no vacío, resulta una variedad unidimensional conexa no compacta, sin puntos de tangencia vertical, ya que la derivada parcial de  $\tilde{f}_2$  con respecto a  $x_2$  no se anula en  $\mathcal{Z}$ . Así, utilizando la Proposición 44, solo nos resta mostrar que tiene a lo sumo 2 puntos de inflexión, para poder afirmar que  $\tilde{F}$ , y en consecuencia  $F$ , tiene a lo sumo 4 ceros no degenerados.

Si  $x$  es un punto de inflexión de  $\mathcal{Z}$ , por la Proposición 45, se verifican las siguientes igualdades:

$$\widehat{T_2 d}^{\neq 0} [a^2(d-1)T_1^2 + a(ad-d-2c)T_1T_2 - c(c+d)T_2^2] = 0, \quad 1 + T_1 + T_2 = 0. \quad (3.4)$$

Trabajaremos sobre la primer igualdad, teniendo siempre presente, aunque no en forma explícita, la segunda. Entonces:

$$\begin{aligned}a^2(d-1)T_1^2 + a(ad-d-2c)T_1(-1-T_1) - c(c+d)(1+T_1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow [a(-a+2c+d) - c(c+d)]T_1^2 + [ad(a+1) - 2c^2]T_1 - c(c+d) &= 0,\end{aligned}$$

un polinomio no nulo, dado que el término independiente es distinto de cero, de grado a lo sumo 2. Con lo cual, el sistema (3.4), tiene a lo sumo dos soluciones.

Sea  $T_1 = \alpha$  y  $T_2 = \beta$  una posible solución. Entonces, analicemos cuantos  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{>0}^2$  pueden llegar a verificar:

$$\frac{c_5}{c_4}x_1^a - \alpha = 0, \quad \text{y} \quad \frac{c_6}{c_4}x_1^c x_2^d - \beta = 0.$$

Por el Corolario 21, existe a lo sumo un  $x_1 \in \mathbb{R}_{>0}$  que satisface la primer igualdad. El cual, en cuyo caso exista, reemplazado en la segunda igualdad, hace de ésta una ecuación en una variable de dos monomios. Así, una vez más, por el Corolario 21, tiene a lo sumo una solución.

Por lo tanto,  $\mathcal{Z}$  tiene a lo sumo dos puntos de inflexión. Concluimos de este modo que si el polítopo suma de Minkowski es un pentágono entonces el sistema tiene a lo sumo 4 soluciones.

Un sistema donde se alcanza la igualdad es  $F : f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$ , donde

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - 7x_1 + 12, \quad f_2(x_1, x_2) = x_2^2 - \frac{5}{6}x_1x_2 + 1.$$

El cual tiene como conjunto de soluciones a  $\{(3, 2), (3, \frac{1}{2}), (4, 3), (4, \frac{1}{3})\}$ , todas no degeneradas. Y la suma de Minkowski de los polítopos de Newton de cada  $f_i$  es el pentágono con vértices  $\{(0, 0), (2, 0), (3, 1), (2, 2), (0, 2)\}$ .

Existen sistemas con cuatro soluciones en el primer cuadrante que tienen el polítopo suma de Minkowski un pentágono y el polítopo de ninguno de los  $f_i$  es un segmento. Un sistema con estas características puede ser el siguiente:

$$f_1(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_1^{\frac{1}{36}}x_2^{\frac{1}{2}}, \quad f_2(x_1, x_2) = 1.3 - 1.44x_1 - x_2.$$

Donde una aproximación numérica del conjunto de soluciones es:

$$\{(0.01105072562, 1.284086955), (0.8464051620, 0.081176567), \\ (0.2136875288, 0.9922899585), (0.5241914530, 0.5451643077)\}.$$

Damos de este modo por terminada la demostración del Teorema. □

Podemos notar fácilmente que un sistema de dos trinomios en dos variables tendrá 5 soluciones no degeneradas solo si la suma de Minkowski de los respectivos polítopos de Newton es un hexágono.



# Referencias

- [1] R. Benedetti y J. Risler. *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Hermann (1990).
- [2] D. Cox, J. Little y D. OShean. *Using Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 185, Springer, 1997.
- [3] S. Grossman. *Calculus*, Harcourt Brace & Company, Fifth Edition, 1986.
- [4] V. Guillemin y A. Pollack. *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1974).
- [5] B. Haas. *A simple Counterexample to Kouchnirenkos Conjeture*, 2000 (inédito).
- [6] J. Heintz. *Definability and quantifier elimination in algebraically closed fields*, Theoretical Computer Science 24 (1983), páginas 239-277.
- [7] A. G. Khovanskii. *Fewnomials*, American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monographs volumen 88, 1991.
- [8] T. Li, M. Rojas y X. Wang. *Counting isolated roots of trinomial systems in the plane and Beyond*, 2001 (inédito).
- [9] E. Lima. *Espacos Metricos*, projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993.
- [10] J. W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia (1965).
- [11] D. Perrucci. *Sobre la cantidad de componentes conexas reales de hipersuperficies polinomiales*, Tesis de Licenciatura, FCEyN - UBA (2002).

- [12] M. Spivak. *Cálculo en variedades*, Editorial Reverté, s.a. 1979.
- [13] B.Sturmfels. *Polynomial Equation and Convex Polytopes*, American Mathematical Society, Traslations of Mathematical Monographs, December 1998.